# Devoir Maison n°2

**Pour le 04/10/22**

**Conseils et consignes :**

- Lisez l'énoncé du devoir avec attention.
- L'usage de la calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.
- Soignez la rédaction et la présentation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats et donc corrigés.
- Vous devez laisser de la place (une demi page) pour votre note et des commentaires en début de copie.
- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
- Écrire lisiblement les numéros des questions traitées et numéroter les pages.

## Exercice 1.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{(2n+1)!}{(n+1)!} \geq (n+1)^n$.
2. En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)! \geq (n!)^n$.

## Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$. On appelle coefficient binomial "$k$ parmi $n$", et on note $\binom{n}{k}$ la quantité

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner les valeurs de $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{n}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq k \leq n$. Montrer que
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$. Montrer que
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

## Exercice 3.

1. Rappeler la formule donnant pour $x$ réel, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.
2. En dérivant cette expression, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k k$.
3. Retrouver ce résultat en calculant de deux façons différentes $\displaystyle\sum_{0 \leq i < j \leq n} 2^j$.