Correction du Devoir Maison n° 3

08/11/22

Exercice 1 :

Le but de cet exercice est l'étude de la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x - e^{-x}$$

et la résolution d'une équation. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. (a) Donner le domaine de définition de f et étudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
2. (a) Calculer $f'(x)$ pour x réel.
   (b) Construire le tableau de variation de f. (*On admet ici que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$)
   (c) Calculr $f(0)$ et déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.
   (d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. On note cette droite T.
3. (a) Calculer la dérivée seconde de f et donnez le signe de $f''(x)$.
   (b) Construire sur un même schéma $\mathcal{C}_f$ et T.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère dans cette question à l'équation (E_n) d'inconnue x : $f(x) = n$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $x^2 - nx - 1 = 0$ admet deux solutions réelles que l'on déterminera et dont on précisera les signes.
   (b) A l'aide du changement de variable $t = e^x$, déterminer la solution u_n de (E_n) pour n entier naturel.

1. (a) Les fonctions $x \to e^x$ et $x \to e^{-x}$ sont définies sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{Ainsi, la fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$ Le domaine de définition est symétrique. Soit $x \in \mathbb{R}$, on calcule

$$\begin{aligned} f(-x) &= e^{-x} - e^{-(-x)} \\ &= e^{-x} - e^x \\ &= -(e^x - e^{-x}) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est impaire.}}$ On peut en déduire que

$$\boxed{\text{La courbe } \mathcal{C}_f \text{ est symétrique par rapport à l'origine.}}$$

2. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables. On calcule

$$\boxed{f'(x) = e^x + e^{-x}}$$

(b) La fonction exponentielle étant toujours positive, la dérivée de f est strictement positive. On en déduit le tableau de variation suivant

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	
Variation de f	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

(c) On calcule

$$f(0) \quad = \quad e^0 - e^0 = 0$$

D'après le tableau de variation et le résultat précédent,

$$\boxed{f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in]0; +\infty[}$$

$$\boxed{f(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in]-; \infty; 0[}$$

(d) On a $f'(0) = e^0 + e^0 = 2$ et $f(0) = 0$. Ainsi l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est

$$\boxed{y = 2x.}$$

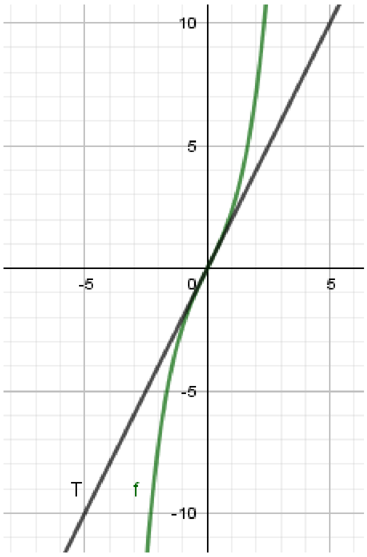
(e) On calcule la dérivée seconde de f :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = e^x - e^{-x} = f(x).}$$

3. (a) On en déduit le signe de f'' :

$$\boxed{f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in]0; +\infty[\text{ et } f''(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in]-; \infty; 0[}$$

(b) On construit la courbe représentative de f et la tangente en 0



4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule le discriminant de l'équation $x^2 - nx - 1 = 0$.

$$\Delta = (-n)^2 - 4 \times (-1) = n^2 + 4 > 0$$

L'équation a donc deux solutions réelles données par

$$\boxed{x_1 = \frac{n - \sqrt{n^2+4}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{n + \sqrt{n^2+4}}{2}}$$

On a évidemment x_2 positif (somme de termes positifs). L'étude est moins clair pour x_1. On a

$$\begin{aligned} n^2 + 4 > n^2 \quad &\Longrightarrow \quad \sqrt{n^2+4} > n \\ &\Longrightarrow \quad 0 > n - \sqrt{n^2+4} \\ &\Longrightarrow \quad 0 > x_1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a } x_1 \text{ négatif et } x_2 \text{ positif.}}$$

(b) On utilise le changement de variable $t = e^x$. On a alors

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} = n \quad &\Longleftrightarrow \quad e^x - \frac{1}{e^x} = n \\ &\Longrightarrow \quad t - \frac{1}{t} = n \\ &\Longrightarrow \quad t^2 - 1 = nt \\ &\Longrightarrow \quad t^2 - nt - 1 = 0 \end{aligned}$$

D'après les résultats de la question précédente, on a $t = x_1$ ou $t = x_2$, c'est à dire, $e^x = x_1$ ou $e^x = x_2$. Or, $e^x = x_1$ est impossible car x_1 est négatif.

$$\boxed{\text{L'équation n'a donc qu'une solution : } \mathcal{S} = \left\{ \ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right) \right\}.}$$

Exercice 2 :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 3$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
2. Montrer que la suite est décroissante.
3. Soit $(v_n)_{n\geq\mathbb{N}}$, définie par $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

1. On raisonne par récurrence.
   Initialisation :
   Pour $n = 0$, on sait que $u_0 = 3 > 2$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

   Hérédité :
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n > 2$. Montrons que $u_{n+1} > 2$.

   On remarque que
   $$u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} = \frac{2(u_n + 1)}{u_n + 1} + \frac{2u_n - 4}{u_n + 1} = 2 + \frac{2(u_n - 2)}{u_n + 1}$$
   Comme par hypothèse $u_n > 2$, $2(u_n - 2) > 0$ et $u_n + 1 > 0$, donc $u_{n+1} > 2$. La propriété est alors vraie au rang $n + 1$.

   Conclusion :
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 2.}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - u_n = \frac{4u_n - 2 - u_n^2 - u_n}{u_n + 1} = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{u_n + 1}$$
   On cherche les racines du trinôme $-x^2 + 3x - 2$: $\Delta = 9 - 8 = 1$.
   $$x_1 = \frac{-3 - 1}{-2} = 2 \qquad x_2 = \frac{-3 + 1}{-2} = 1$$
   Le trinôme est négatif à l'extérieur des racines, et comme $u_n > 2$, $-u_n^2 + 3u_n - 2 < 0$. Or on a également $u_n + 1 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

   $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geq 0} \text{ est décroissante.}}$
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1} = \frac{\dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 2}{\dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 1} = \frac{\frac{4u_n - 2 - 2u_n - 2}{u_n + 1}}{\frac{4u_n - 2 - u_n - 1}{u_n + 1}} = \frac{2u_n - 4}{3u_n - 3} = \frac{2}{3} \times \frac{u_n - 2}{u_n - 1} = \frac{2}{3} v_n$$
   La suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est donc $\boxed{\text{géométrique de raison } \frac{2}{3} \text{ et de terme initial } v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 - 1} = \frac{1}{2}.}$

(b) On déduit de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{v_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1} \Leftrightarrow v_n(u_n - 1) = u_n - 2 \Leftrightarrow v_n u_n - v_n = u_n - 2 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = v_n - 2 \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1}$$

On remplace v_n par son expression :

$$u_n = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1} = \frac{\frac{2^{n-1}}{3^n} - 2}{\frac{2^{n-1}}{3^n} - 1} = \frac{\frac{2^{n-1} - 2\times 3^n}{3^n}}{\frac{2^{n-1} - 3^n}{3^n}} = \frac{2^{n-1} - 2 \times 3^n}{2^{n-1} - 3^n} = \frac{2^{n-1} - 3^n}{2^{n-1} - 3^n} - \frac{3^n}{2^{n-1} - 3^n} = 1 - \frac{3^n}{2^{n-1} - 3^n}$$

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 - \dfrac{3^n}{2^{n-1} - 3^n}}$.

Exercice 3 :

On considère les matrices $N = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ et $M = \frac{1}{20}N$. On pose $A = N - 4I_3$ et $B = N - 12I_3$.

1. Vérifier que $AB = BA = 0$. En déduire que $NA = 12A$ et $NB = 4B$.
2. On considère les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ définies par $a_0 = \frac{1}{8}$, $b_0 = -\frac{1}{8}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 12a_n$ et $b_{n+1} = 4b_n$.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $N^n = a_n A + b_n B$.
   (b) De quel type sont les suites (a_n) et (b_n) ? Donner leur terme général en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Montrer que $M^n = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^n A - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Un particulier a acheté une poule. La poule pond chaque semaine entre 0 et 3 œufs. Si une semaine donnée, la poule ne pond pas d'œuf, son propriétaire décide de la vendre à la fin de la semaine (elle ne lui donnera donc plus d'œufs les semaines suivantes). On note, pour tout entier naturel n non nul :
   - u_n la probabilité que la poule ne soit pas vendue la $n^{ième}$ semaine et ponde 1 œuf ;
   - d_n la probabilité que la poule ne soit pas vendue la $n^{ième}$ semaine et ponde 2 œufs ;
   - t_n la probabilité que la poule ne soit pas vendue la $n^{ième}$ semaine et ponde 3 œufs.

   On suppose que la première semaine, la poule pond un œuf puis, que pour tout entier naturel n non nul, on a
$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{7}{20}u_n + \frac{1}{10}d_n + \frac{1}{20}t_n \\ d_{n+1} &= \frac{3}{20}u_n + \frac{3}{10}d_n + \frac{1}{20}t_n \\ t_{n+1} &= \frac{9}{20}u_n + \frac{3}{10}d_n + \frac{7}{20}t_n \end{cases}$$
   On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ d_n \\ t_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} = MX_n$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = M^{n-1}X_1$.
   (c) En déduire les termes généraux des trois suites (u_n), (d_n) et (t_n) en fonction de $n \geq 1$.
   (d) Que représente le nombre $1 - (u_n + d_n + t_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?
   (e) Vérifier que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n + 2d_n + 3t_n = \frac{9}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{7}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.
   (f) On définit la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(u_k + 2d_k + 3t_k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donner le terme général de (S_n) en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ et l'interpréter dans le contexte de l'énoncé.

1. On vérifie aisément par le calcul que $\boxed{AB = BA = 0.}$ On en déduit alors que $(N - 4I_3)(N - 12I_3) = 0 = N^2 - 16N + 48I_3$, donc $N^2 = 16N - 48I_3$.
   Donc $NA = N(N - 4I_3) = N^2 - 4N = 16N - 48I_3 - 4N = 12N - 48I_3 = 12(N - 4I_3)$. donc $\boxed{NA = 12A.}$
   De plus, $NB = N(N - 12I_3) = N^2 - 12N = 16N - 48I_3 - 12N = 4N - 48I_3 = 4(N - 12I_3)$. donc $\boxed{NB = 4B.}$

2. (a)
- <u>Initialisation</u> ($n=0$) : $\frac{1}{8}A-\frac{1}{8}B=\frac{1}{8}A-\frac{1}{2}I_3-\frac{1}{8}N+\frac{3}{2}I_3=I_3=N^0$. L'égalité est donc vraie au rang 0.
- <u>Hérédité</u> : soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $N^n=a_nA+b_nB$, et on veut montrer que $N^{n+1}=a_{n+1}A+b_{n+1}B$.
  On a que $N^{n+1}=N\times N^n=N(a_nA+b_nB)=a_nNA+b_nNB=a_n\times 12A+b_n\times 4B=12a_nA+4b_nB=a_{n+1}A+b_{n+1}B$. Récurrence établie.
- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ N^n=a_nA+b_nB.}$

(b) Par définition, $\boxed{\text{les suites } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont géométriques}}$ et

$\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ a_n=\frac{1}{8}\times 12^n \text{ et } b_n=-\frac{1}{8}\times 4^n.}$

(c) Par définition, $M=\frac{1}{20}N$ donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $M^n=\left(\frac{1}{20}\right)^n\times N^n=\frac{1}{20^n}\left(\frac{1}{8}\times 12^n\times A-\frac{1}{8}\times 4^n\times B\right)=\frac{1}{8}\times\frac{12^n}{20^n}\times A-\frac{1}{8}\times\frac{4^n}{20^n}\times B$.

Donc, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ M^n=\frac{1}{8}\times\left(\frac{3}{5}\right)^n\times A-\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n\times B.}$

3. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a $NX_n=\begin{pmatrix}7u_n+2d_n+t_n\\3u_n+6d_n+t_n\\9u_n+6d_n+7t_n\end{pmatrix}$. Donc on a bien que $\boxed{MX_n=\frac{1}{20}NX_n=X_{n+1}.}$

(b)
- <u>Initialisation</u> ($n=1$) : $M^{1-1}X_1=M^0X_1=I_3\times X_1=X_1$. Donc l'égalité est vraie au rang 1.
- <u>Hérédité</u> : soit $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose que $X_n=M^{n-1}X_1$ et on veut montrer que $X_{n+1}=M^nX_1$.
  On a que $X_{n+1}=MX_n=M\times M^{n-1}X_1=M^nX_1$. Récurrence établie.
- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ X_n=M^{n-1}X_1.}$

(c) Notons d'abord que $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\3&2&1\\9&6&3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-5&2&1\\3&-6&1\\9&6&-5\end{pmatrix}$. On a alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$M^{n-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+\frac{5}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} & \frac{2}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-\frac{2}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} & \frac{1}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\\ \frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-\frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} & \frac{2}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+\frac{6}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} & \frac{1}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\\ \frac{9}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-\frac{9}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} & \frac{6}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-\frac{6}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} & \frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+\frac{5}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\end{pmatrix}.$$

Comme $X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, on obtient donc que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $X_n=\begin{pmatrix}\frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+\frac{5}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\\ \frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-\frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\\ \frac{9}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-\frac{9}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\end{pmatrix}$, soit

$\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+\frac{5}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1},\ d_n=\frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-\frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \text{ et } t_n=\frac{9}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-\frac{9}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}$

(d) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, le nombre $1-(u_n+d_n+t_n)$ représente la probabilité que la poule ne ponde aucun œuf (et donc soit vendue) la $n^{ième}$ semaine.

(e) Soit $n\geq 1$. Alors $u_n+2d_n+3t_n=\left(\frac{3}{8}+\frac{6}{8}+\frac{27}{8}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+\left(\frac{5}{8}-\frac{6}{8}-\frac{27}{8}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\frac{36}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-\frac{28}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$. Donc en simplifiant, on obtient que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n + 2d_n + 3t_n = \frac{9}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{7}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}.}$$

(f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n = \frac{9}{2}\sum_{k=1=n}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} - \frac{7}{2}\sum_{k=1=n}\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1} = \frac{9}{2} \times \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{3}{5}} - \frac{7}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}$

$= \frac{45}{4}\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right) - \frac{35}{8}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$. Donc on obtient que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{55}{8} - \frac{45}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{35}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n.}$$

Le nombre S_n représente $\boxed{\text{le nombre moyen d'œufs que peut espérer le particulier au bout de } n \text{ semaines}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.