Correction du Devoir Maison n° 4

29/11/22

Exercice 1 :

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère le système suivant :

$$(S_m)\ \begin{cases} x+y+mz &= m \\ mx+y+mz &= 1 \\ mx+my+z &= m \end{cases}$$

1. Montrer que (S_m) est de Cramer si et seulement si m est différent de -1 et 1.
2. Résoudre, pour tout $m \in \mathbb{R}$, le système (S_m).
3. Sans aucun calcul, justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible (on ne demande pas la matrice inverse).

1. On applique la méthode du pivot de Gauss avec les opérations suivantes : $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - mL_1$. On obtient :

$$(S_m) \iff \begin{cases} x+y+mz &= m \\ (1-m)y+(m-m^2)z &= 1-m^2 \\ (1-m^2)z &= m-m^2 \end{cases}$$

   On obtient ainsi un système triangulaire. Ce système est de Cramer si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls, c'est-à-dire si et seulement si : $1-m \neq 0$ et $1-m^2 \neq 0$ ce qui est équivalent à $m \neq 1$ et -1.

   $\boxed{\text{Conclusion : le système } (S_m) \text{ est de Cramer si et seulement si } m \text{ est différent de } 1 \text{ et de } -1.}$

2. Distinguons trois cas :
   - Si $m = 1$, on a :

$$(S_1) \iff \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

     Ainsi (x,y,z) est solution de (S_1) si et seulement $x = 1-y-z$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions du système est $\boxed{\{(1-y-z,y,z)/\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}.}$
   - Si $m = -1$, on a :

$$(S_{-1}) \iff \begin{cases} x+y-z &= -1 \\ 2y-2z &= 0 \\ 0 &= -2 \end{cases}$$

     Dans ce cas, $\boxed{\text{le système n'admet pas de solution.}}$
   - Soit $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ Nous connaissons déjà un système triangulaire à têtes de lignes non nulles équivalent à (S_m). Sachant que m est différent de -1 et 1, on a :

$$z = \frac{m-m^2}{1-m^2} = \frac{m(1-m)}{(1-m)(1+m)} = \frac{m}{1+m}$$

     puis en utilisant la deuxième ligne :

$$(1-m)y = 1-m^2-(m-m^2)z = (1-m)(1+m)-m(1-m)z$$

     en divisant par $1-m$ (qui est différent de 0), on a :

$$y = 1+m-mz = 1+m-\frac{m^2}{1+m}$$

Finalement, en utilisant la première ligne, on a :

$$x = -y - mz + m = -\left(1 + m - \frac{m^2}{1+m}\right) - m\frac{m}{1+m} + m$$

ce qui donne :

$$x = -1 + \frac{m^2}{1+m} - \frac{m^2}{1+m} = -1$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\boxed{\left\{\left(-1, 1 + m - \frac{m^2}{1+m}, \frac{m}{1+m}\right)\right\}.}$

3. La matrice A est la matrice associée au système (S_4) qui est un système de Cramer. Ainsi la matrice A est inversible.

   $\boxed{\text{Conclusion : La matrice } A \text{ est inversible.}}$

Exercice 2 :

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2}{1+5u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, u_n existe et $u_n > 0$.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\geq 0}$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \leq \dfrac{2u_n}{5}$ *(pas besoin de démonstration par récurrence).*
4. En déduire que pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq \left(\dfrac{2}{5}\right)^n u_0$.
5. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer, en fonction de u_0, un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, u_n existe et $u_n > 0$.

   Soit $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n > 0$ » pour tout $n \geq 0$.

   Initialisation : d'après l'énoncé, u_0 existe et $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ donc $u_0 > 0$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : on suppose que la propriété est vraie à un rang $n \geq 0$ quelconque, c'est-à-dire :

   $$u_n \text{ existe et } u_n > 0$$

   Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire :

   $$u_{n+1} \text{ existe et } u_{n+1} > 0$$

   D'après l'hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n > 0$. Ainsi $1+5u_n > 0$ et en particulier $1+5u_n \neq 0$. Ainsi $\dfrac{2u_n^2}{1+5u_n}$ existe et donc u_{n+1} existe. Par quotient de termes strictement positifs (car $u_n > 0$), $u_{n+1} > 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire. Par principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq 0$. Ainsi : $\boxed{\text{pour tout } n \geq 0,\ u_n \text{ existe et } u_n > 0\cdot}$

2. Soit $n \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n^2}{1+5u_n} - u_n \\ &= \frac{2u_n^2 - u_n(1+5u_n)}{1+5u_n} \\ &= \frac{2u_n^2 - u_n - 5u_n^2}{1+5u_n} \\ &= \frac{-3u_n^2 - u_n}{1+5u_n} \end{aligned}$$

Or $u_n > 0$ donc le numérateur est strictement négatif et le dénominateur est strictement positif. Par quotient, on a donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

$\boxed{\text{Conclusion : } (u_n)_{n\geq 0} \text{ est strictement décroissante.}}$

3. Soit $n \geq 0$. Raisonnons par équivalences :

$$\begin{aligned} u_{n+1} \leq \frac{2u_n}{5} &\iff \frac{2u_n^2}{1+5u_n} \leq \frac{2u_n}{5} \\ &\iff \frac{5(2u_n^2) - 2u_n(1+5u_n)}{5(1+5u_n)} \leq 0 \\ &\iff \frac{10u_n^2 - 2u_n - 10u_n^2}{5(1+5u_n)} \leq 0 \\ &\iff \frac{-2u_n}{5(1+5u_n)} \leq 0 \end{aligned}$$

Clairement cette dernière inégalité est vraie car $u_n > 0$.

$\boxed{\text{Conclusion : pour tout } n \geq 0,\ u_{n+1} \leq \frac{2u_n}{5}.}$

4. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0$.

Soit $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0$ » pour tout $n \geq 0$.

Initialisation : on a $\left(\frac{2}{5}\right)^0 u_0 = u_0$. Ainsi $u_0 \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0$ et ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : on suppose que la propriété est vraie à un rang $n \geq 0$ quelconque, c'est-à-dire :

$$u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0$$

Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire :

$$u_{n+1} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} u_0$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0$. En multipliant par $\frac{2}{5}$, on a : $\frac{2}{5}u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} u_0$. Or, d'après la question précédente, $u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$. Ainsi :

$$u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} u_0$$

et la propriété est alors vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire. Par principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq 0$. Ainsi : $\boxed{\text{pour tout } n \geq 0,\ u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} u_0}$

5. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$|u_n| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq u_n \leq \varepsilon$$

Or, les termes de la suite étant strictement positifs, ainsi,

$$|u_n| \leq \varepsilon \iff u_n \leq \varepsilon$$

Sachant que $u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0$, si l'on détermine un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\left(\frac{2}{5}\right)^n u_0 \leq \varepsilon$$

alors on aura pour tout $n \geq N$,

$$u_n \leq \varepsilon$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{5}\right)^n u_0 \leq \varepsilon &\iff \left(\frac{2}{5}\right)^n \leq \frac{\varepsilon}{u_0} && (u_0 > 0) \\
&\iff n \ln\left(\frac{2}{5}\right) \leq \ln\left(\frac{\varepsilon}{u_0}\right) && (\text{stricte croissante de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) \\
&\iff n \geq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{u_0}\right)}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} && \left(\text{car } \ln\left(\frac{2}{5}\right) < 0\right)
\end{aligned}$$

Ainsi si N est un entier supérieur ou égal à $\dfrac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{u_0}\right)}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}$, on a le résultat souhaité. On peut choisir N de la manière suivante :

$$N = \left\lfloor \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{u_0}\right)}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} \right\rfloor + 1$$