Devoir Maison n°4

Pour le 29/11/22

Conseils et consignes :

- Lisez l'énoncé du devoir avec attention.
- L'usage de la calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.
- Soignez la rédaction et la présentation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats et donc corrigés.
- Vous devez laisser de la place (une demi page) pour votre note et des commentaires en début de copie.
- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
- Écrire lisiblement les numéros des questions traitées et numéroter les pages.

Exercice 1.

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère le système suivant :

$$(S_m) \begin{cases} x + y + mz &= m \\ mx + y + mz &= 1 \\ mx + my + z &= m \end{cases}$$

1. Montrer que (S_m) est de Cramer si et seulement si m est différent de -1 et 1.
2. Résoudre, pour tout $m \in \mathbb{R}$, le système (S_m).
3. Sans aucun calcul, justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible (on ne demande pas la matrice inverse).

Exercice 2.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2}{1+5u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, u_n existe et $u_n > 0$.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\geq 0}$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \leq \dfrac{2u_n}{5}$ *(pas besoin de démonstration par récurrence).*
4. En déduire que pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq \left(\dfrac{2}{5}\right)^n u_0$.
5. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer, en fonction de u_0, un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.