Correction du Devoir Maison n° 5

3/01/23

1. (a) On a $\boxed{D_1 = \overline{E_1}}$, $\boxed{D_2 = E_1 \cap \overline{E_2}}$ et $\boxed{D_k = \bigcap_{i=0} k-1 E_i \cap \overline{E_k}.}$

   (b) On a $\boxed{P(D_1) = \dfrac{3}{10}}$ et $\boxed{P(D_2) = P(E_1) \times \mathrm{P}_{E_1}(\overline{E_2}) = \dfrac{7}{10} \times \dfrac{3}{9} = \dfrac{7}{30}}$.

   D'après la formule des probabilités composées, $\boxed{P(D_3) = P(E_1) \times \mathrm{P}_{E_1}(E_2) \times \mathrm{P}_{E_1 \cap E_2}(\overline{E_3}) = \dfrac{7}{10} \times \dfrac{6}{9} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{7}{40}.}$

   De même, $\boxed{P(D_4) = \dfrac{7}{10} \times \dfrac{6}{9} \times \dfrac{5}{8} \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{1}{8}.}$

   (c) Étant donné qu'il n'y a que 7 boules blanches dans l'urne, nécessairement la première boule noire apparaîtra au plus tard au 8 ième tirage. Donc $\boxed{P(D_9) = P(D_{10}) = 0.}$

2. (a) D'après l'énoncé, on a $\boxed{u_1 = \dfrac{1}{2}.}$ La famille $(U_1, \overline{U_1})$ formant un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, $P(U_2) = P(U_1) \times \mathrm{P}_{U_1}(U_2) + P(\overline{U_1}) \times \mathrm{P}_{\overline{U_1}}(U_2) = \dfrac{1}{2} \times p + \dfrac{1}{2} \times (1-q)$. Donc $\boxed{u_2 = \dfrac{p-q+1}{2}.}$

   Enfin, $\mathrm{P}_{U_2}(U_1) = \mathrm{P}_{U_1}(U_2) \times \dfrac{P(U_1)}{P(U_2)} = p \times \dfrac{u_1}{u_2} = p \times \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{p-q+1}{2}}$. Donc $\boxed{\mathrm{P}_{U_2}(U_1) = \dfrac{p}{p-q+1}.}$

   (b) i. On cherche à calculer $P(U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n)$.

   D'après la formule des probabilités composées, $P(U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n) = \dfrac{1}{2} \times \underbrace{p \times p \ldots \times p}_{n-1 \text{ termes}}$. On obtient alors que la probabilité de ne pas effectuer de tirage dans l'urne V au cours des n premiers tirages vaut $\boxed{\dfrac{p^{n-1}}{2}.}$

   ii. On cherche à calculer $P(U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap \overline{U_n})$. On utilise un raisonnement similaire à la question précédente.

   D'après la formule des probabilités composées, $\boxed{P(U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap \overline{U_n}) = \dfrac{p^{n-2}(1-p)}{2}.}$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $(U_n, \overline{U_n})$ forme un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales, $P(U_{n+1}) = P(U_n)\,\mathrm{P}_{U_n}(U_{n+1}) + P(\overline{U_n})\,\mathrm{P}_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) = pu_n + (1-q)(1-u_n)$.

   Donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = (p+q-1)u_n + 1 - q.}$ Il vient alors que la suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique.

   Résolvons maintenant l'équation $x = (p+q-1)x + 1 - q$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On obtient $x = \dfrac{q-1}{p+q-2}$ ($p+q-2 \neq 0$ car $p \neq 1$ et $q \neq 1$).

   Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - \dfrac{q-1}{p+q-2}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{q-1}{p+q-2} = (p+q-1)u_n + 1 - q - \dfrac{q-1}{p+q-2}$
   $= (p+q-1)\left[u_n + \dfrac{1-q}{p+q-1} + \dfrac{1-q}{(p+q-2)(p+q-1)}\right] = (p+q-1)\left[u_n + \dfrac{(1-q)(p+q-2)+1-q}{(p+q-2)(p+q-1)}\right]$
   $= (p+q-1)\left[u_n + \dfrac{(1-q)(p+q-1)}{(p+q-2)(p+q-1)}\right] = (p+q-1)\left[u_n + \dfrac{1-q}{(p+q-2)}\right] = (p+q-1)\left[u_n - \dfrac{q-1}{(p+q-2)}\right] = (p+q-1)v_n$. Donc (v_n) est géométrique de raison $p+q-1$ et de premier terme $v_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{q-1}{p+q-2}$.

   Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{q-1}{p+q-2}\right) \times (p+q-1)^{n-1} + \dfrac{q-1}{p+q-2}.}$

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle B_n l'événement "obtenir une boule blanche au $n^{ième}$ tirage". Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La famille $(U_n, \overline{U_n})$ forme un système complet d'événements. Donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(B_n) = P(U_n)\,\mathrm{P}_{U_n}(B_n) + P(\overline{U_n})\,\mathrm{P}_{\overline{U_n}}(B_n) = u_n \times p + (1-u_n) \times q = (p-q)u_n + q$.

Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ P(B_n) = (p-q) \times \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{q-1}{p+q-2}\right) \times (p+q-1)^{n-1} + \frac{q-1}{p+q-2}\right] + q.}$

3. (a) Á l'issue de la première épreuve, on pioche nécessairement une boule noire dans U et une boule blanche dans V, de sorte que U ne contient qu'une seule boule noire après l'échange. Donc $\boxed{a_1 = c_1 = 0}$ et $\boxed{b_1 = 1.}$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La famille (A_k, B_k, C_k) forme un système complet d'événements (car il n'y a que deux boules noires disponibles dans l'expérience). Donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(B_{k+1}) = P(A_k)\,\mathrm{P}_{A_k}(B_{k+1}) + P(B_k)\,\mathrm{P}_{B_k}(B_{k+1}) + P(C_k)\,\mathrm{P}_{C_k}(B_{k+1}).$$

- Si l'urne A contient 2 boules noires ou 0 boule noire, pour une raison analogue à la question précédente, $\mathrm{P}_{A_k}(B_{k+1}) = 1 = \mathrm{P}_{C_k}(B_{k+1})$.
- Si l'urne A contient 1 boule noire, alors l'urne V aussi. L'événement B_{k+1} se réalise si et seulement si on pioche la boule blanche dans U et la boule blanche dans V (de probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$) ou bien si on pioche la boule noire dans U et la boule noire dans V (de probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$).
Donc $\mathrm{P}_{B_k}(B_{k+1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

On obtient alors bien $\boxed{b_{k+1} = a_k + \frac{1}{2}b_k + c_k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*.}$
La formule des probabilités totales donne également que

$$P(A_{k+1}) = P(A_k)\,\mathrm{P}_{A_k}(A_{k+1}) + P(B_k)\,\mathrm{P}_{B_k}(A_{k+1}) + P(C_k)\,\mathrm{P}_{C_k}(A_{k+1})$$

$$\text{et } P(C_{k+1}) = P(A_k)\,\mathrm{P}_{A_k}(C_{k+1}) + P(B_k)\,\mathrm{P}_{B_k}(C_{k+1}) + P(C_k)\,\mathrm{P}_{C_k}(C_{k+1}).$$

- Si l'urne A contient 2 boules noires ou 0 boule noire, pour une raison analogue à la question précédente, on a $\mathrm{P}_{A_k}(A_{k+1}) = \mathrm{P}_{C_k}(A_{k+1}) = 0 = \mathrm{P}_{A_k}(C_{k+1}) = \mathrm{P}_{C_k}(C_{k+1})$.
- Si l'urne A contient 1 boule noire, l'événement A_{k+1} se réalise si et seulement si on pioche la boule blanche dans V et la boule noire dans U (de probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$). Donc $\mathrm{P}_{B_k}(A_{k+1}) = \frac{1}{4}$.
Symétriquement, $\mathrm{P}_{B_k}(C_{k+1}) = \frac{1}{4}$.

Donc on obtient que $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ a_{k+1} = \frac{1}{4}b_k \text{ et } c_{k+1} = \frac{1}{4}b_k.}$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On sait que $a_k + b_k + c_k = 1$ (car la famille (A_k, B_k, C_k) forme un système complet d'événements) donc $a_k + c_k = 1 - b_k$. Donc, comme $b_{k+1} = a_k + \frac{1}{2}b_k + c_k = 1 - b_k + \frac{1}{2}b_k$.

Donc on a bien que, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ b_{k+1} = 1 - \frac{1}{2}b_k.}$

(d) La suite (b_k) est donc arithmético-géométrique. Résolvons l'équation $x = 1 - \frac{1}{2}x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $x = 1 - \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$. On pose alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $t_k = b_k - \frac{2}{3}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $t_{k+1} = b_{k+1} - \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2}b_k - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}b_k = -\frac{1}{2}\left(b_k - \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}t_k$.

Donc (t_k) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $t_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Donc

$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ b_k = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{2}{3}.}$

On en déduit alors que

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{a_k = c_k = \frac{1}{12} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{1}{6}.}$