Devoir Maison n°5

Pour le 3/01/22

Conseils et consignes :

- Lisez l'énoncé du devoir avec attention.
- L'usage de la calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.
- Soignez la rédaction et la présentation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats et donc corrigés.
- Vous devez laisser de la place (une demi page) pour votre note et des commentaires en début de copie.
- Les exercices peuvent étre traités dans l'ordre de votre choix.
- Écrire lisiblement les numéros des questions traitées et numéroter les pages.

Dans cet exercice, on se propose d'étudier trois expériences aléatoires indépendantes les unes des autres. Par abus de langage, on désignera par le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ la modélisation de chacune de ces expériences.

1. **Expérience 1**
   On dispose d'une urne U qui contient 3 boules noires et 7 boules blanches, dans laquelle on effectue des tirages sans remise. Pour tout $k \in [|1;10|]$, on appelle D_k l'événement "on obtient la première boule noire au $k$ième tirage", et on appelle E_k l'événement "on obtient une boule blanche au $k$ième tirage".
   (a) Soit $k \in [|1;8|]$ fixé. Exprimer D_1, D_2 puis D_k en fonction des événements E_i, $i \in [|1;8|]$.
   (b) Calculer $P(D_1)$, $P(D_2)$, $P(D_3)$ puis $P(D_4)$.
   (c) Que valent $P(D_9)$ et $P(D_{10})$?

2. **Expérience 2**
   On dispose de deux urnes U et V qui contiennent des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches dans U est notée $p \in]0;1[$ et la proportion de boules blanches dans V est notée $q \in]0;1[$.
   Au premier tirage, on choisit une urne au hasard. Chaque tirage se fait avec remise selon la règle suivante : si on tire une boule blanche, le tirage suivant se fera dans la même urne, et si on tire une boule noire, le tirage suivant se fera dans l'autre urne. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle U_n l'événement "le $n$ième tirage a lieu dans l'urne U" et on note $u_n = P(U_n)$.
   (a) Calculer u_1 puis u_2. Déterminer alors $P_{U_2}(U_1)$.
   (b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2 fixé.
      i. Calculer la probabilité de ne pas effectuer de tirage dans l'urne V au cours des n premiers tirages.
      ii. Calculer la probabilité d'effectuer pour la première fois le tirage dans l'urne V au $n$ième tirage.
   (c) Déterminer une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire une expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
   (d) Déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche au $n^{ième}$ tirage (où $n \in \mathbb{N}^*$).

3. **Expérience 3**
   On dispose d'une urne U contenant 2 boules noires, et d'une urne V contenant 2 boules blanches. On y effectue une suite d'épreuves comme suit : à chaque épreuve, on tire au hasard une boule de l'urne U et une boule de l'urne V, puis on les échange d'urne.
   On introduit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les événements
   - A_k : "à l'issue de la $k$ième épreuve, l'urne U contient 2 boules noires",
   - B_k : "à l'issue de la $k$ième épreuve, l'urne U contient 1 boule noire",
   - C_k : "à l'issue de la $k$ième épreuve, l'urne U contient 0 boule noire".

   On notera, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, a_k, b_k et c_k leur probabilité respective.
   (a) Déterminer a_1, b_1 et c_1.
   (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $b_{k+1} = a_k + \dfrac{1}{2}b_k + c_k$. Déterminer les relations de récurrence analogues pour a_{k+1} et c_{k+1}.
   (c) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $b_{k+1} = 1 - \dfrac{1}{2}b_k$.
   (d) En déduire l'expression de b_k en fonction de $k \geq 1$, puis celle de a_k et c_k en fonction de $k \geq 1$.