Correction du Devoir Maison n° 7

24/01/23

Exercice 1 :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$. Supposons de plus que P a au moins une racine $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha + n$ est une racine de P.
2. Déduire l'ensemble des polynômes P vérifiant ces hypothèses.

1. On raisonne par récurrence.

   Initialisation :
   Pour $n = 0$, on sait d'après l'énoncé que $\alpha + 0 = \alpha$ est racine de P, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
   Hérédité :
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\alpha + n$ est racine de P. Montrons que $\alpha + n + 1$ est racine de P.

   Par hypothèse $\alpha + n$ est racine de P, c'est à dire que $P(\alpha + n) = 0$. De plus, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) = P(x)$. En remplçant x par $\alpha + n$,on obtient

   $$P(\alpha + n + 1) = P(\alpha + n) = 0$$

   Donc $\alpha + n + 1$ est racine de P et la propriété est vérifiée au rang $n + 1$.
   Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \alpha + n \text{ est racine de } P.}$

2. Un polynôme P qui vérifie de telles hypothèses admet, d'après la questions précédente, une infinité de racines. Or si P est de degré positif n, il admet au plus n racines.
   On en déduit que $\boxed{\text{le seul polynôme possible est le polynôme nul.}}$

Exercice 2 :

1. Factoriser le polynôme $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.
2. Donner les domaines de définition des fonctions $\frac{1}{P}$ et $\ln(P)$.
3. Étudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$.
4. Résoudre l'équation $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0$.

1. On remarque tout d'abord que $P(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$, donc 1 est racine de P. On en déduit qu'il existe un polynôme Q de degré 2 tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$

   $$P(x) = (x-1)Q(x)$$

   Par division euclidienne on obtient

   $$Q(x) = x^2 - x - 6 \qquad P(x) = (x-1)(x^2 - x - 6)$$

   On cherche à présent les racines du trinôme.

   $$\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$$

   Il y a deux racines

   $$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2 \qquad x_2 = 3$$

   Ainsi $Q(x) = (x+2)(x-3)$ et

   $$\boxed{P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)}$$

2. La fonction $\dfrac{1}{P}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tels que $P(x) \neq 0$. Ainsi cette fonction est définie sur $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{-2; 1; 3\}}$.

   La fonction $\ln(P)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tels que $P(x) > 0$. On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

   Ainsi la fonction $\ln(P)$ est définie sur $\boxed{]-2; 1[\cup]3; +\infty[}$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = P(x)$$

   D'après la question précédente, on obtient que
   $\boxed{f \text{ est croissante sur } [-2; 1] \text{ et } [3; +\infty[\text{, décroissante sur }]-\infty; -2] \text{ et } [1; 3]}$.

4. On pose $X = \ln(x)$. L'équation devient $X^3 - 2X^2 - 5X + 6 = 0$, c'est à dire $P(X) = 0$. La question 1 donne trois solutions possibles :

$$X = -2 \qquad X = 1 \qquad X = 3$$

   On cherche maintenant les valeurs possibles de x :

$$x = e^{-2} \qquad x = e \qquad x = e^3$$

   $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation est } \{e^{-2} : e; e^3\}}$.

Exercice :3

1. Résoudre le système $\begin{cases} x - 2y + z = a \\ x - 4y + 2z = b \\ -2x - 2y + 2z = c \end{cases}$

2. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (x - 2y + z, x - 4y + 2z, -2x - 2y + 2z)$$

   est bijective et donner son application réciproque.

1.

$$\begin{cases} x & -2y & +z & = & a \\ x & -4y & +2z & = & b \\ -2x & -2y & +2z & = & c \end{cases} \underset{\Leftrightarrow}{\overset{L_2 \to L_2 - L_1}{L_3 \to L_3 + 2L_1}} \begin{cases} x & -2y & +z & = & a \\ & -2y & +z & = & b - a \\ & -6y & +4z & = & c + 2a \end{cases}$$

$$\underset{\Leftrightarrow}{L_3 \to L_3 - 3L_2} \begin{cases} x & -2y & +z & = & a \\ & -2y & +z & = & b - a \\ & & z & = & 5a - 3b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = & a + 2y - z \\ y = & 3a - 2b + \frac{c}{2} \\ z = & 5a - 3b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = & 2a - b \\ y = & 3a - 2b + \frac{c}{2} \\ z = & 5a - 3b + c \end{cases}$$

   L'ensemble des solutions du système est

$$\boxed{S = \left\{ (2a - b;\ 3a - 2b + \frac{c}{2};\ 5a - 3b + c) \right\}}$$

2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On résout l'équation $f(x, y, z) = (a, b, c)$.

$$f(x,y,z) = (a,b,c) \Leftrightarrow (x-2y+z; x-4y+2z = b, -2x-2y+2z = c) = (a,b,c) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} x & -2y & +z & = & a \\ x & -4y & +2z & = & b \\ -2x & -2y & +2z & = & c \end{array}\right.$$

On retrouve ainsi le système de la question précédente. Ce système admet une unique solution, ainsi l'équation $f(x, y, z) = (a, b, c)$ n'admet qu'une seule solution dans $\mathbb{R}^3$. $\boxed{\text{L'application } f \text{ est donc bijective}}$, d'application réciproque

$$\boxed{f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y;\ 3x-2y+\frac{z}{2};\ 5x-3y+z) \end{array}}$$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2-3}{2x^2+1}$.

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^-$ dans $[-3; \dfrac{1}{2}[$.
2. Déterminer la bijection réciproque de f.

1. Soit $y \in [-3; \frac{1}{2}[$. On résout $y = f(x)$.

$$\begin{aligned} y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x^2-3}{2x^2+1} &\Leftrightarrow y(2x^2+1) = (x^2-3) \Leftrightarrow x^2(1-2y) = y+3 \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{y+3}{1-2y} \end{aligned}$$

   Pour qu'il y ait des solutions à cette équation, il faut nous assurer que le membre de droite soit positif, on pourra ensuite appliquer la racine carrée. Or $y \in [-3; \frac{1}{2}[$ donc $y + 3 \geq 0$ et

$$y < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2y < 1 \Leftrightarrow -2y > -1 \Leftrightarrow 1 - 2y > 0$$

   Donc pour tout $y \in [-3; \frac{1}{2}[$, $\frac{y+3}{1-2y} \geq 0$ et

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{y+3}{1-2y}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{y+3}{1-2y}}$$

   La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^-$ donc on cherche des solutions négatives. Il n'y a donc qu'une seule solution dans $\mathbb{R}^-$ de l'équation $y = f(x)$, qui est $x = -\sqrt{\dfrac{y+3}{1-2y}}$. $\boxed{\text{L'application } f \text{ est donc bijective.}}$

2. L'application réciproque de f est

$$\boxed{f^{-1} : \begin{array}{ccc} [-3; \frac{1}{2}[& \to & \mathbb{R}^- \\ x & \mapsto & -\sqrt{\frac{x+3}{1-2x}} \end{array}}$$