Devoir Maison n°6
Pour le 24/01/23

Conseils et consignes :

- Lisez l'énoncé du devoir avec attention.
- L'usage de la calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.
- Soignez la rédaction et la présentation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats et donc corrigés.
- Vous devez laisser de la place (une demi page) pour votre note et des commentaires en début de copie.
- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
- Écrire lisiblement les numéros des questions traitées et numéroter les pages.

Exercice 1.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$. Supposons de plus que P a au moins une racine $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha + n$ est une racine de P.
2. Déduire l'ensemble des polynômes P vérifiant ces hypothèses.

Exercice 2.

1. Factoriser le polynôme $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.
2. Donner les domaines de définition des fonctions $\frac{1}{P}$ et $\ln(P)$.
3. Étudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$.
4. Résoudre l'équation $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0$.

Exercice 3.

1. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & a \\ x & - & 4y & + & 2z & = & b \\ -2x & - & 2y & + & 2z & = & c \end{array}\right.$
2. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par
$$f(x, y, z) = (x - 2y + z, x - 4y + 2z, -2x - 2y + 2z)$$
est bijective et donner son application réciproque.

Exercice 4.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2x^2 + 1}$.

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^-$ dans $[-3; \dfrac{1}{2}[$.
2. Déterminer la bijection réciproque de f.