Correction du Devoir Maison n° 7

On consid?e la fonction f d?inie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{x \ln(x) - 1}{x}$$

1. Pour tout x > 0, on a

$$f(x) = \frac{x \ln(x)}{x} - \frac{1}{x} = \ln(x) - \frac{1}{x}$$

Or, $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x} = -\infty$ donc

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$

La courbe repr?entative de f admet une asymptote verticale en 0.

2. On a

$$f(x) = \frac{x \ln(x) - 1}{x} = \frac{x \ln(x) \left(1 - \frac{1}{x \ln(x)}\right)}{x}$$
$$= \ln(x) \left(1 - \frac{1}{x \ln(x)}\right)$$

Or

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x \ln(x)} \right) = 1, \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Ainsi

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

De m?e

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x \ln(x) - 1}{x^2} = \frac{x \ln(x) \left(1 - \frac{1}{x \ln(x)}\right)}{x^2}$$
$$= \frac{\ln(x)}{x} \left(1 - \frac{1}{x \ln(x)}\right)$$

Or

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1-\frac{1}{x\ln(x)}\right) = 1, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{(par croissance compar?)}$$

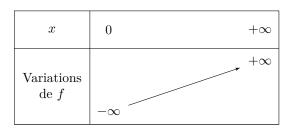
Ainsi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

3. La fonction f est d?ivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que somme et quotient de fonctions d?ivables sur cet intervalle. Donc, $\forall x > 0$

$$f'(x) = \frac{(\ln(x) + 1)x - (x\ln(x) - 1)}{x^2}$$
$$= \frac{x+1}{x^2} > 0$$

4. On trace les variations de la fonction f.



- 5. On applique le th?r?e de la bijection
 - La fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^*
 - La fonction f est continue sur \mathbb{R}_+^*
 - On a f(1) = -1 < 0 et $f(e) = \frac{e-1}{e} > 0$.

Donc d'apr? le th?r?e de la bijection, il existe un unique $\alpha \in [1, e]$ tel que $f(\alpha) = 0$.