Correction du Devoir Maison n° 7

7/02/23

On consid ?e la fonction f d ?inie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{x\ln(x) - 1}{x}$$

1. Pour tout $x > 0$, on a

$$f(x) = \frac{x\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} = \ln(x) - \frac{1}{x}$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{x} = -\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty}$$

La courbe repr ?entative de f admet une $\boxed{\text{asymptote verticale}}$ en 0.

2. On a

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x\ln(x) - 1}{x} &= \frac{x\ln(x)\left(1 - \frac{1}{x\ln(x)}\right)}{x} \\ &= \ln(x)\left(1 - \frac{1}{x\ln(x)}\right) \end{aligned}$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x\ln(x)}\right) = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

De m ?e

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} = \frac{x\ln(x) - 1}{x^2} &= \frac{x\ln(x)\left(1 - \frac{1}{x\ln(x)}\right)}{x^2} \\ &= \frac{\ln(x)}{x}\left(1 - \frac{1}{x\ln(x)}\right) \end{aligned}$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x\ln(x)}\right) = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{(par croissance compar ?)}$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0}$$

3. La fonction f est d ?ivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme et quotient de fonctions d ?ivables sur cet intervalle. Donc, $\forall x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\ln(x) + 1)x - (x\ln(x) - 1)}{x^2} \\ &= \frac{x+1}{x^2} > 0 \end{aligned}$$

4. On trace les variations de la fonction f.

x	0	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$+\infty$

5. On applique le th ?r ?e de la bijection
   - La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
   - La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
   - On a $f(1) = -1 < 0$ et $f(e) = \dfrac{e-1}{e} > 0$.

   Donc d'apr ? le th ?r ?e de la bijection, $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in [1, e] \text{ tel que } f(\alpha) = 0.}$