Devoir Maison n°7
Pour le 28/02/23

Conseils et consignes :

- Lisez l'énoncé du devoir avec attention.
- L'usage de la calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.
- Soignez la rédaction et la présentation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats et donc corrigés.
- Vous devez laisser de la place (une demi page) pour votre note et des commentaires en début de copie.
- Les exercices peuvent étre traités dans l'ordre de votre choix.
- Écrire lisiblement les numéros des questions traitées et numéroter les pages.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on prend comme convention : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^0 = 1$. L'objectif est d'établir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Partie A : Programme Python

1. Recopier et compléter le script Python suivant, de sorte que, si $k \in \mathbb{N}$, alors l'exécution de factorielle(k), renvoie la valeur de $k!$.

```
def factorielle(k):
        res = ......
        for i in range(......) :
                res = ......
        return res
```

2. (a) Ecrire une fonction Python prenant en arguments d'entrée un réel x et un entier naturel n, puis renvoyant en sortie la liste composée des réels : $\frac{x^0}{0!}, \frac{x^1}{1!}, \ldots, \frac{x^n}{n!}$.

   (b) En déduire une fonction Python prenant en arguments d'entrée un réel x et un entier naturel n, puis renvoyant en sortie la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

3. Recopier et compléter le programme suivant de sorte que, si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors son exécution renvoie la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

```
def CB_somme(x,n) :
        facto = ......
        S = ......
        for k in range(1,n+1)
                facto = k*facto
                S = ......
                return S
```

4. Entre les programmes des questions 2.b et 3, lequel préférer ? Justifier la réponse.

Partie B : Une croissance comparée

L'objectif de cette partie est d'établir le résultat suivant, qui sera utile dans la partie C :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{|x|^n}{n!}$. Posons $n_0 = \lfloor 2|x| \rfloor$.

5. Rappeler l'encadrement reliant x et $\lfloor x \rfloor$.
6. Démontrer que $\forall n \in [|n_0; +\infty[|$, $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$.
7. En déduire que pour tout $n \in [|n_0; +\infty[|$, $u_n \leq \dfrac{1}{2^{n-n_0}}u_{n_0}$.
8. Conclure.

<u>Partie C :Démonstration</u>

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n et g_n les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = f_n(x) + \frac{x^n}{n!}e^{-x}$$

9. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0)$ et $g_n(0)$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x} \quad ; \quad g_n'(x) = \frac{n-2x}{n!}x^{n-1}e^{-x}$$

11. <u>Premier cas : si $x \in [0; +\infty[$.</u>
    (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente les tableaux de variations des fonctions f_n et g_n sur $[0; +\infty[$.
    (b) Soient $x \in [0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $n \geq 2x$. Démontrer que

    $$f_n(x) \leq 1 \leq g_n(x)$$

    En déduire

    $$0 \leq e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^n}{n!}$$

    (c) Conclure
12. <u>Second cas : si $x \in]-\infty; 0[$.</u>
    (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner les tableaux de variations des fonctions f_{2n} et f_{2n+1} sur $\mathbb{R}_-$.
    (b) Soient $x \in \mathbb{R}_-^*$, et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

    $$f_{2n+1}(x) \leq 1 \leq f_{2n}(x)$$

    En déduire

    $$0 \leq e^x - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} \leq -\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq e^x - \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} \leq 0$$

    (c) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $(f_{2n}(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(f_{2n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent la même limite e^x.
    (d) Conclure