Correction du Devoir Maison n° 8

21/03/23

Exercice 1 :

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par :

$$u_0 = 3,\ v_0 = 5 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$$

1. (a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, "$u_n > 0$ et $v_n > 0$".
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{(v_n-u_n)^2}{2(v_n+u_n)}$.
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
   (d) Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$.
   (b) Montrer alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n - u_n \leq \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n)$.
3. Déduire des questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) convergent.
4. Montrer que la suite (u_nv_n) est constante. Donner sa valeur.
5. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

1. (a) **Initialisation :**

   Pour $n = 0$, on a $u_0 = 3 > 0$ et $v_0 = 5 > 0$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

   Hérédité :
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

   On déduit de cette hypothèse que $2u_nv_n > 0$, $u_n + v_n > 0$, donc

   $$u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} > 0; \qquad v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} > 0$$

   Conclusion :
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 0 \text{ et } v_n > 0.}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

   $$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} - \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} = \frac{u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2 - 4u_nv_n}{2(u_n+v_n)} = \frac{v_n^2 - 2u_nv_n + u_n^2}{2(u_n+v_n)} = \boxed{\frac{(v_n-u_n)^2}{2(u_n+v_n)}}$$

   (c) D'après les deux questions précédentes , on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$

   $$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(v_n-u_n)^2}{2(u_n+v_n)} \geq 0$$

   Ce qui signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$. Reste à voir le cas $n = 0$. Or pour $n = 0$, on a $u_0 = 3 < v_0 = 5$, donc $u_0 \leq v_0$.

   $\boxed{\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n.}$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} - u_n = \frac{2u_nv_n - u_n^2 - u_nv_n}{u_n+v_n} = \frac{-u_n^2+u_nv_n}{u_n+v_n} = \frac{u_n(v_n-u_n)}{u_n+v_n}$$

D'après la question précédente $v_n - u_n \geq 0$ et comme (u_n) et (v_n) sont positives, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante.}}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$$

D'après la question précédente, on a donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$, et donc $\boxed{(v_n) \text{ est décroissante.}}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 1b), $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{(v_n-u_n)^2}{2(u_n+v_n)} = \dfrac{(v_n-u_n)}{2} \times \dfrac{(v_n-u_n)}{(v_n+u_n)}$.

Comme $u_n \geq 0$ et $v_n \geq u_n$, on a $0 \leq v_n - u_n \leq v_n + u_n$, et donc $\dfrac{(v_n-u_n)}{v_n+u_n} \leq 1$. Finalement on trouve

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(v_n-u_n)}{2} \times \frac{(v_n-u_n)}{(v_n+u_n)} \leq \frac{(v_n-u_n)}{2}$$

(b) On sait déjà d'après la question 1c) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \geq 0$. Reste à prouver l'autre inégalité. On raisonne par récurrence.

Initialisation :

Pour $n = 0$, $v_0 - u_0 = 5 - 3 = 2$ et $\frac{1}{2^0} = 1$, donc $v_0 - u_0 \leq \dfrac{1}{2^0}(v_0 - u_0)$.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $v_n - u_n \leq \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.

D'après la question précédente, $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{(v_n-u_n)}{2}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on trouve alors

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq .\frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}(v_0-u_0) \Leftrightarrow v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(v_0 - u_0)$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a bien } v_n - u_n \leq \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0).}$

(c) $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, et comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{(v_n - u_n) \text{ converge et } \displaystyle\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0.}$

3. On a montré que (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$, les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes.

$\boxed{\text{Elles convergents donc vers la même limite, que l'on notera } \ell\text{, qui est strictement positive}}$.(Théorème de comparaison en passant à la limite dans la question 1a)).

4. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1}v_{n+1} = \frac{(u_n+v_n)}{2} \times \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} = u_nv_n$$

$\boxed{\text{La suite } (u_nv_n) \text{ est donc constante et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_nv_n = u_0v_0 = 15.}$

5. En passant à limite dans l'égalité précédente, on trouve $\ell^2 = 15$. On en déduit donc que $\ell = \sqrt{15}$ ou $\ell = -\sqrt{15}$. Comme $\ell > 0$, $\boxed{\text{les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers la même limite } \ell = \sqrt{15}.}$

Exercice 2 :

Soit A la matrice définie par $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. (a) Calculer $A^2 - 7A$.

(b) En déduire que A est inversible et donner son inverse.

(c) On note $E_3 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | AX = 3X\}$. Montrer que E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par deux vecteurs u_1 et u_2 que l'on précisera.

(d) On note $E_4 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | AX = 4X\}$. Montrer que E_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par un vecteur u_3.

(e) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. Soit P la matrice définie par $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que P et inversible et donner son inverse.

(b) Vérifier que $D_1 = P^{-1}AP$ et $D_2 = P^{-1}BP$ sont deux matrices diagonales.

3. On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $X_{n+2} = \frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n$. Soit $(Y_n)_{\in\mathbb{N}}$ la suite matricielle définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n = P^{-1}X_n$.

(a) Calculer Y_0 et Y_1.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente que

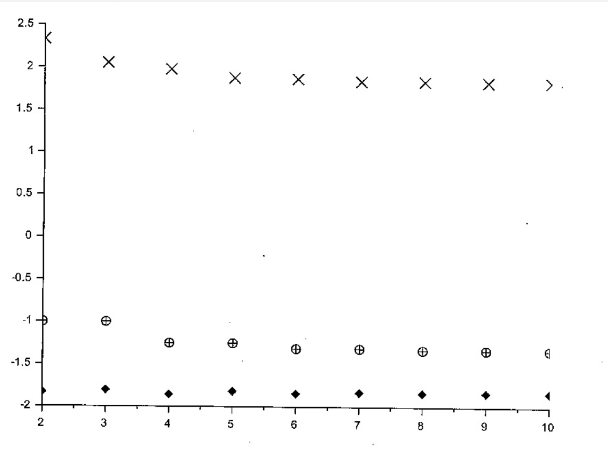
$$\begin{cases} a_{n+2} &= \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \\ b_{n+2} &= \frac{1}{2}b_{n+1} \\ c_{n+2} &= \frac{2}{3}c_{n+1} + \frac{1}{3}c_n \end{cases}$$

(d) Pour tout entier n, calculer a_n, b_n et c_n.

(e) En déduire l'expression de X_n en fonction de n. On notera $X_n \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, et on vérifiera que

$$\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}.$$

4. Associer chacune des trois représentations graphiques à chacune des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en justifiant votre réponse.



1. (a) Le calcul donne

$$A^2 - 7A = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = -12 I_3$$

(b) De la relation précédente, on peut déduire que

$$A(A-7I) = -12 \Leftrightarrow A\left(\frac{7I-A}{12}\right) = I$$

Ainsi A est inversible d'inverse $A^{-1} = \dfrac{7I-A}{12}$

(c) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On résout les équations

$$\begin{aligned} AX = 3X \quad &\iff \quad \begin{cases} 2x+y-2z &= 3x \\ 3y &= 3y \\ x-y+5z &= 3z \end{cases} \\ &\iff \quad x-y+2z = 0 \\ &\iff \quad X = \begin{pmatrix} y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$E_3 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

On note $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) On raisonne façon analogue

$$\begin{aligned} AX = 4X \quad &\iff \quad \begin{cases} 2x+y-2z &= 4x \\ 3y &= 4y \\ x-y+5z &= 4z \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} -2x-y+2z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z &= -x \\ y &= 0 \end{cases} \\ &\iff \quad X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$E_4 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

On note $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$..

2. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On résout l'équation $PX = B$

$$PX = B \Leftrightarrow \begin{cases} x & +y & -z & = & a \\ -x & +y & & = & b \\ -x & & +z & = & c \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x & +y & -z & = & a \\ & 2y & -z & = & b+a \\ & y & & = & c+a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a-y+z \\ z = 2y-b-a \\ y = c+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a-b+c \\ y = a+c \\ z = a-b+2c \end{cases}$$

Le système admet une unique solution, il est donc de Cramer. Ainsi P est inversible d'inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Après calcul, on trouve

$$D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Après calcul, on obtient

$$Y_0 = P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad Y_1 = P^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On injecte la définition de Y_n mais on commence par observer que

$$P^{-1}A = D_2P^{-1}, \qquad \text{et} \qquad P^{-1}B = D_1P^{-1}.$$

$$\begin{aligned} Y_{n+2} &= P^{-1}X_{n+2} \\ &= P^{-1}\left(\frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n\right) \\ &= \frac{1}{6}P^{-1}AX_{n+1} + \frac{1}{6}P^{-1}BX_n \\ &= \frac{1}{6}D_1P^{-1}X_{n+1} + \frac{1}{6}D_2P^{-1}X_n \\ &= \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(c) Comme

$$D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

la relation précédente donne immédiatement

$$\begin{aligned} Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n \quad &\iff \quad \begin{cases} a_{n+2} &= \frac{1}{6} \times 3a_{n+1} + \frac{1}{6} \times 3a_n \\ b_{n+2} &= \frac{1}{6} \times 3b_{n+1} + 0 \\ c_{n+2} &= \frac{1}{6} \times 4c_{n+1} + \frac{1}{6} \times 2c_n \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} a_{n+2} &= \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \\ b_{n+2} &= \frac{1}{2}b_{n+1} \\ c_{n+2} &= \frac{2}{3}c_{n+1} + \frac{1}{3}c_n \end{cases}, \end{aligned}$$

ce qu'on nous demandait.

(d) On reconnait deux suites à récurrence linéaire d'ordre 2 ((a_n) et (c_n)) et pour (b_n) une suite géométrique de raison $1/2$. On commence par celle-ci car c'est la plus immédiate à exprimer

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Pour les deux autres, on suit le protocole du cours, en commençant par introduire l'équation caractéristique. Pour (a_n), celle ci est

$$q^2 - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2} = 0 \iff q = 1 \quad \text{ou} \quad q = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$a_n = \lambda \times 1^n + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

où λ et μ sont à déterminer avec les conditions initiales. En injectant les valeurs pour $n = 0$ et $n = 1$, on trouve

$$a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Enfin, pour (c_n), l'équation caractéristique est

$$q^2 - \frac{2}{3}q - \frac{1}{3} = 0 \Longleftrightarrow q = 1 \quad \text{ou} \quad q = -\frac{1}{3}.$$

Ainsi,

$$c_n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

et on applique la même méthode pour trouver λ et μ, pour obtenir

$$c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

(e) Par définition

$$Y_n = P^{-1}X_n \Longleftrightarrow X_n = PY_n.$$

Ou encore

$$\begin{aligned} X_n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{6} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ -\frac{11}{6} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\begin{cases} \alpha_n &= \frac{11}{6} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \beta_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \gamma_n &= -\frac{11}{6} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{cases}}$$

4. (a) Comme $-1 < -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$, les comportements asymptotiques de α_n, β_n et γ_n donnent

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{11}{6} \qquad \lim_{n\to+\infty} \beta_n = \frac{-4}{3} \qquad \lim_{n\to+\infty} \gamma_n = -\frac{11}{6}$$

et on a également $\alpha_0 = 3$, $\beta_0 = 0$ et $\gamma_0 = -1$. Ces informations permettent de déduire que la représentation graphique de α_n est en haut avec des croix, celle de β_n est au mileu avec des croix entourées d'un cercle, et celle de γ_n) est en bas avec des losanges.