Devoir Maison n°8

Pour le 21/03/23

Conseils et consignes :

- Lisez l'énoncé du devoir avec attention.
- L'usage de la calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.
- Soignez la rédaction et la présentation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats et donc corrigés.
- Vous devez laisser de la place (une demi page) pour votre note et des commentaires en début de copie.
- Les exercices peuvent étre traités dans l'ordre de votre choix.
- Écrire lisiblement les numéros des questions traitées et numéroter les pages.

Exercice n°1

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par :

$u_0 = 3$, $v_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$

1. (a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, "$u_n > 0$ et $v_n > 0$".
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{(v_n-u_n)^2}{2(v_n+u_n)}$.
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
   (d) Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$.
   (b) Montrer alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n - u_n \leq \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n)$.
3. Déduire des questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) convergent.
4. Montrer que la suite (u_nv_n) est constante. Donner sa valeur.
5. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

Exercice n°2

Soit A la matrice définie par $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. (a) Calculer $A^2 - 7A$.
   (b) En déduire que A est inversible et donner son inverse.
   (c) On note $E_3 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | AX = 3X\}$. Montrer que E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par deux vecteurs u_1 et u_2 que l'on précisera.
   (d) On note $E_4 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | AX = 4X\}$. Montrer que E_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par un vecteur u_3.
   (e) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Soit P la matrice définie par $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P et inversible et donner son inverse.
   (b) Vérifier que $D_1 = P^{-1}AP$ et $D_2 = P^{-1}BP$ sont deux matrices diagonales.
3. On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $X_{n+2} = \dfrac{1}{6}AX_{n+1} + \dfrac{1}{6}BX_n$. Soit $(Y_n)_{\in\mathbb{N}}$ la suite matricielle définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n = P^{-1}X_n$.

(a) Calculer Y_0 et Y_1.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+2} = \frac{1}{6} D_1 Y_{n+1} + \frac{1}{6} D_2 Y_n$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente que

$$\begin{cases} a_{n+2} & = \frac{1}{2} a_{n+1} + \frac{1}{2} a_n \\ b_{n+2} & = \frac{1}{2} b_{n+1} \\ c_{n+2} & = \frac{2}{3} c_{n+1} + \frac{1}{3} c_n \end{cases}$$

(d) Pour tout entier n, calculer a_n, b_n et c_n.

(e) En déduire l'expression de X_n en fonction de n. On notera $X_n \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, et on vérifiera que

$$\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} - \frac{4}{3}.$$

4. Associer chacune des trois représentations graphiques à chacune des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en justifiant votre réponse.