CHAPITRE 1

FONCTIONS USUELLES

I. RAPPELS SUR LES QUANTIFICATEURS

- Le symbole $\forall$ signifie « pour tout » ou « quel que soit ».
- Le symbole $\exists$ signifie « il existe ».
- Le symbole $\exists\,!$ signifie « il existe un unique ».

Exemple :

Ecrire « en français » les phrases suivantes.

1. « $\forall x \in [1, +\infty[, x^2 \geq 1$ » :
2. « $\exists n \in \mathbb{N}, n > 100$ » :
3. « $\exists ! x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 = 0$ » :

Remarque :

La virgule qui suit un quantificateur $\exists$ se traduit par :"tel que". On peut également trouver parfois le symbole $|$ ou $/$.

Exemple :

Ecrire avec des quantificateurs les phrases suivantes.

1. « Quel que soit l'entier naturel n, n^2 est supérieur ou égal à n » :
2. « Il existe un unique entier naturel n tel que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ soit égal à 2 » :

II. ENSEMBLE DE DÉFINITION, ENSEMBLE IMAGE

Définition 2.1

Soit $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
Définir une **fonction** f de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$, c'est associer à tout nombre réel x de $\mathcal{D}$ un unique nombre réel que l'on note $f(x)$. On appelle $\mathcal{D}$ l'**ensemble de définition** de f. On peut désigner cette fonction par la notation suivante :

Notation : Dans la suite, on notera $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition d'une fonction f.

Exemple :

L'ensemble de définition de la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$. est

Définition 2.2

Soit f une fonction.

- Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on appelle $f(x)$ **l'image** de x par f.
- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on appelle **antécédent** de y par f tout réel $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $f(x) = y$.

Attention:

L'image d'un réel $x \in \mathcal{D}_f$ est **unique** alors qu'un nombre réel y peut ne pas avoir d'antécédents ou en avoir plusieurs. Déterminer l'image d'un nombre revient à effectuer un calcul, déterminer le (ou les) antécédent(s) d'un nombre y par une fonction f revient à résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathcal{D}_f$.

Exercice 1

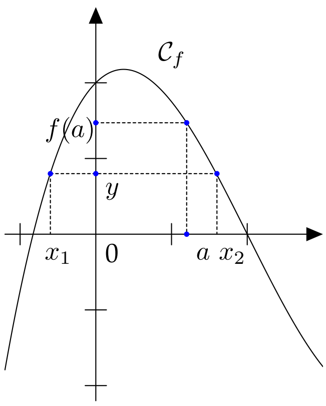
Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$. Donner le ou les antécédents éventuels de -5 par f.

Définition 2.3

On appelle **courbe représentative d'une fonction** f l'ensemble des points du plan de la forme $(x, f(x))$ où $x \in \mathcal{D}_f$. On note cette courbe $\mathcal{C}_f$ et on a donc par définition :

Remarquons qu'un couple de réels (x, y) appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $y = f(x)$.

Représentation graphique d'une fonction



Définition 2.4

Soit f une fonction et E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que $E \subset \mathcal{D}_f$. On appelle ensemble-image de E par f et on note $f(E)$ l'ensemble suivant :

$$f(E) =$$

Méthode :

Pour trouver l'ensemble-image d'un sous-ensemble $E \subset \mathcal{D}_f$ par une fonction f, on peut étudier les variations de f.

Exercice 2

Déterminer l'ensemble-image de E par f dans les cas suivants :

1. $E = [0, 2]$, $D_f = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$.
2. $E = [-3, 2]$, $D_f = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$.
3. $E = [-1, 1]$, $D_f = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^3 + x^2$.

III. FONCTIONS USUELLES

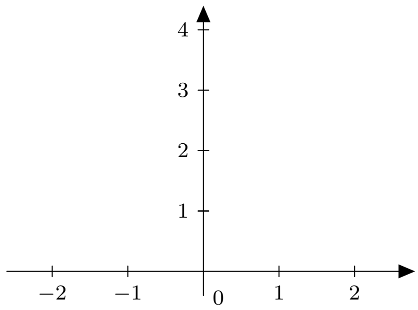
Il est important de connaitre la représentation graphique des fonctions usuelles : cela permet de retenir facilement les propriétés de celles-ci.

III. 1 FONCTIONS PUISSANCES ENTIÈRES

Définition 3.1

On appelle **fonction carré**, la fonction qui, à un nombre réel x, associe le réel x^2.

Représentation graphique de la fonction carré



Proposition 3.2

- La fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2			

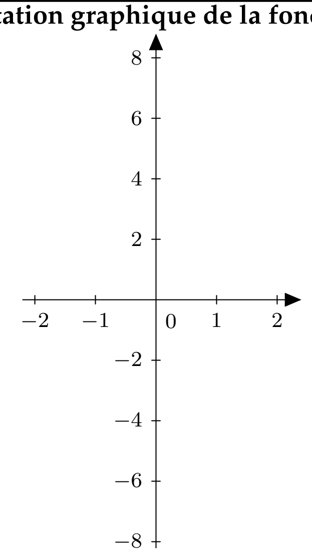
Exercice 3

Encadrer $-2x^2 + 4$ pour $x \in [1, 3]$ puis pour $x \in [-1, 0]$.

Définition 3.3

On appelle **fonction cube**, la fonction qui, à un nombre réel x, associe le réel x^3.

Représentation graphique de la fonction cube



Proposition 3.4

- La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3		

Remarque :

Plus généralement :

- Si n est un entier naturel pair supérieur (ou égal) à 2, alors la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
- Si n est un entier naturel impair, alors la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

III. 2 Fonction inverse

Définition 3.5

On appelle **fonction inverse**, la fonction qui, à tout nombre réel **non nul** x, associe $\dfrac{1}{x}\cdot$

Remarque :

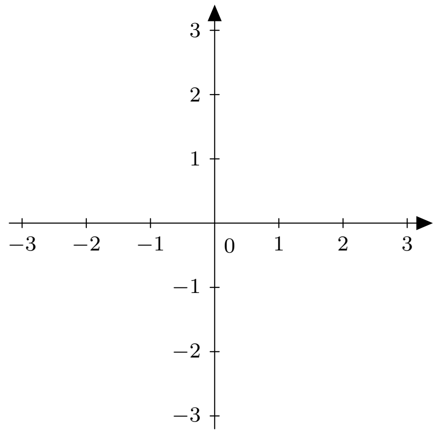
L'ensemble de définition de la fonction inverse est donc ....

Proposition 3.6

- La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	

Représentation graphique de la fonction inverse



Attention:

La fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 4

Encadrer l'expression $\dfrac{2}{3x+1}$ pour $x \in [0, 1]$.

III. 3 Fonction Logarithme népérien

Définition 3.7

La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$, est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \to 1/x$ qui s'annule en 1.

Autrement dit :

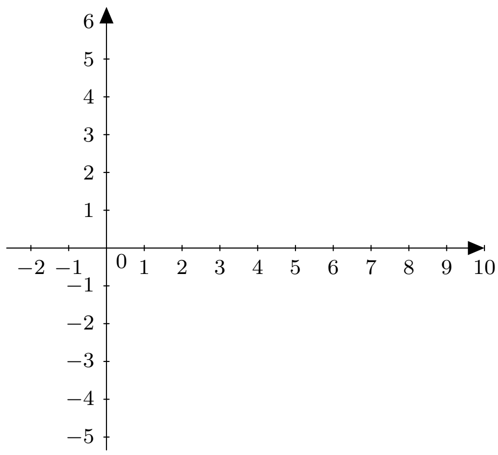
- $\ln$ est définie et dérivable sur
- $\ln(1) =$
- Pour tout $x > 0$, $\ln'(x) =$

Théorème 3.8

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$			

Représentation graphique de la fonction Logarithme népérien



Théorème 3.9 — Propriétés algébriques

Soit a et b deux réels strictement positifs et n un entier relatif.

- $\ln(ab) =$
- $\ln(a^n) =$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) =$
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) =$
- $\ln(a) = \ln(b) \iff$
- $\ln(a) = 0 \iff$
- $\ln(a) < \ln(b) \iff$

Exercice 5

Sachant que $\ln(2) \approx 0.69$, donner une valeur approchée de $\ln(4)$, $\ln(8)$ et de $\ln(1/2)$.

Exercice 6

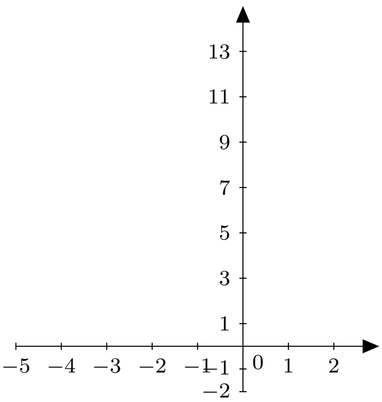
Résoudre l'inéquation $0 \leq \ln(x^2 + x + 5)$.

III. 4 Fonction Exponentielle

Définition/Proposition 3.10

Pour tout réel x, il existe un unique réel y strictement positif tel que $\ln y = x$. On note e^x ou $\exp(x)$ ce nombre réel. On appelle **fonction exponentielle** la fonction, notée $\exp$, qui à x associe le réel e^x.

Représentation graphique de la fonction exponentielle



Proposition 3.11 — Lien exponentielle/logarithme

- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}_+^*,\ e^a = b \Longleftrightarrow$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{\ln(a)} = \quad .$
- $\forall a \in \mathbb{R},\ \ln(e^a) = \quad .$

Remarques :

R1 – La fonction exponentielle est donc définie sur $\mathbb{R}$.
R2 – Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$.
R3 – $e^0 =$ et $e^1 = e \simeq 2,72$. Par définition, on a $\ln(e^1) = \ln(e) = 1$.

Exercice 7

Résoudre l'équation $e^{2x} - 8 = 0$.

Théorème 3.12 — Propriétés algébriques

Soient a, b deux réels et n un entier relatif. On a

- $e^{a+b} =$
- $e^{-a} =$
- $(e^a)^n =$
- $e^{a-b} =$
- $e^a = e^b \Longleftrightarrow$
- $e^a = 1 \Longleftrightarrow$
- $e^a < e^b \Longleftrightarrow$

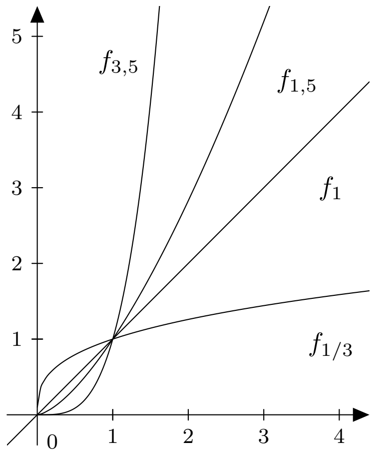
III. 5 Fonctions puissances réelles

Rappel : Si n est un entier relatif et x un réel strictement positif, on a $\ln(x^n) = n\ln(x)$. En appliquant la fonction exponentielle, on a alors $x^n = e^{n\ln(x)}$.

Définition 3.13

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)}$. La fonction **puissance** α est la fonction qui à tout nombre réel strictement positif associe x^α.

Représentation graphique de différentes fonctions puissances



Exemple :

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^{3/2} = e^{3/2\ln(x)}$.

Remarques :

R1 – La fonction puissance α est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

R2 – Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

R3 – Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $1^\alpha = 1$

Proposition 3.14

Soient x, y deux réels strictement positifs et α, β deux réels. On a

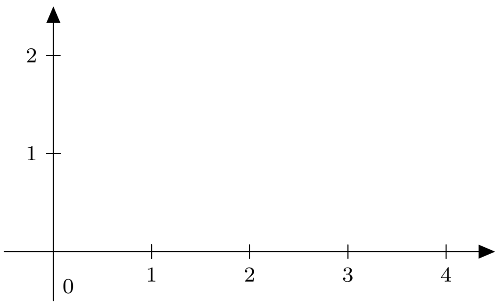
- $x^\alpha \times x^\beta =$
- $x^\alpha \times y^\alpha =$
- Par convention $x^0 =$
- $(x^\alpha)^\beta =$
- $x^{-\alpha} =$
- $x^{\alpha-\beta} =$

III. 6 Racine carrée

Définition 3.15

La fonction racine carrée, est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, par $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$.

Représentation graphique de la fonction racine carrée



Remarque :

- La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+$. La racine carrée d'un nombre est toujours positive.
- La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Proposition 3.16

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

III. 7 Valeur absolue

Définition 3.17

La fonction valeur absolue $x \longrightarrow |x|$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

La valeur absolue d'un nombre réel est sa valeur numérique en « ne tenant pas compte du signe ».

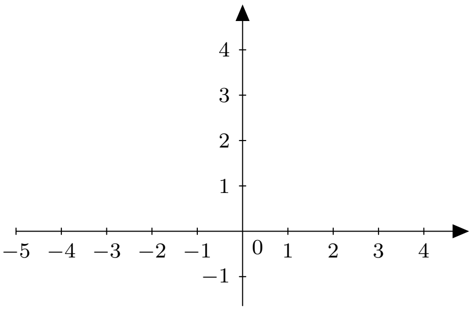
Exemple :

$|3| = 3 \qquad , |-2| = 2$

Remarque :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|^2 = x^2$.

Représentation graphique de la fonction valeur absolue



Proposition 3.18

La fonction valeur absolue est une fonction paire .

Démonstration.

□

Proposition 3.19

Soient x, y deux réels et n un entier naturel.

- $|xy| =$
- $|x^n| =$
- Si $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| =$

Exemple :

$$\frac{|-7 \times 6|}{|(-6)|^2} = \frac{|-7| \times |6|}{|6|^2} = \frac{7 \times 6}{36} = \frac{7}{6}.$$

Proposition 3.20

Soient x, y deux réels et ε un réel strictement positif.

- $\sqrt{x^2} =$.
- $|x| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow$
- $|x| \geq \varepsilon \Longleftrightarrow$.
- $|x| = |y| \Longleftrightarrow$.
- $|x| = \varepsilon \Longleftrightarrow$.

Remarque :

Toutes ces propriétés se retrouvent graphiquement et on a des résultats similaires avec des inégalités strictes.

Attention:

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(\sqrt{x})^2 = x$ pour $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$ (pas forcément x).

Exercice 8

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $|3x + 2| = 7$.
2. Résoudre l'inéquation $|x| \leq 7$.
3. Résoudre l'inéquation $|2x + 1| \geq 3$.

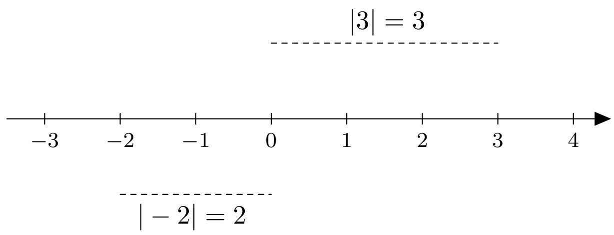
Théorème 3.21 — Inégalités triangulaires

$\forall x, y \in \mathbb{R}$,

- $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- $|x| - |y| \leq |x - y|$.

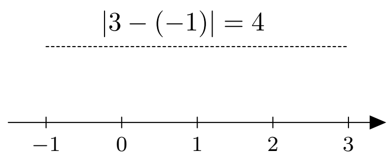
D'un point de vue géométrique la valeur absolue d'un réel x est égal à la **distance entre** 0 **et** x (sur un axe gradué représentant la droite réelle).

Valeur absolue et distance à 0



Pour $x, y \in \mathbb{R}$, l'expression $|x - y|$ représente la **distance entre** x **et** y.

Valeur absolue et distance entre deux nombres



III. 8 Partie entière

Théorème 3.22

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! n \in \mathbb{Z}$, $n \leq x < n + 1$.

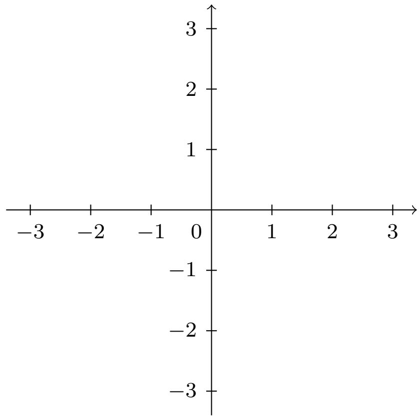
Définition 3.23

D'après le théorème précédent, on sait que tout réel x est compris entre deux entiers consécutifs n et $n + 1$. Cet unique **entier** n est appelé **partie entière** de x et on le note $\lfloor x \rfloor$. Par définition on a alors :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

La partie entière d'un réel est le plus grand entier inférieur ou égal à ce réel.

Représentation graphique de la fonction partie entière



Remarque :

De la même façon, on a $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\, x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x\cdot}$

Exemple :

$\lfloor 7.15 \rfloor = 7 \quad , \lfloor -1.2 \rfloor = -2 \quad , \lfloor e \rfloor = 2 \quad , \lfloor 2 \rfloor = 2$

Exercice 9

Déterminer le plus petit entier naturel $n \in \mathbb{N}$, tel que $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-6}$.

Exercice 10

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

SAVOIR-FAIRE EXIGIBLES :

- Savoir déterminer un ensemble de définition.
- Connaître définition, propriétés, représentation graphique des fonctions usuelles.