

Quantificateurs :

✱ EXERCICE 1

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire les phrases suivantes à l'aide des quantificateurs ou en langage courant.

1. Pour tous réels a et b , il existe un réel compris entre a et b .
2. Il existe un entier compris entre $\sqrt{2}$ et π .
3. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.
4. $\exists! x \in [0, 1], f(x) = 0$.

✱ EXERCICE 2

Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Relier les expressions suivantes avec leur version en utilisant les quantificateurs :

f ne s'annule jamais.	•	$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$.
f est positive	•	$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
f est croissante.	•	$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
f est strictement décroissante.	•	$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
f n'est pas la fonction nulle	•	$\exists! x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
$f(x) = 0$ a exactement une solution	•	$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(-x)$.
f est une fonction impaire.	•	$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
f est une fonction paire.	•	$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.

Ensembles de définition :

✱ EXERCICE 3 (★)

Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes.

1. $f : x \rightarrow \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$	2. $g : x \rightarrow \sqrt{x^2 + 1}$
	3. $h : x \rightarrow \ln(e^x - 1)$.

✱ EXERCICE 4 (★)

Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes.

1. $f : x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}}$	3. $h : x \rightarrow \ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$.
2. $g : x \rightarrow \ln(x)\sqrt{x-2}$	

✱ EXERCICE 5 (★)

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{4x+3}$.	3. $h(x) = \ln(2x^2 - 5x + 3)$.
2. $g(x) = \frac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2 - 1}$.	4. $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^2 - 5x + 3}$.

✱ EXERCICE 6 (★★)

Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes.

1. $f : x \rightarrow \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$	2. $g : x \rightarrow \sqrt{x^2 - p^2}, p \in \mathbb{R}$.
--	---

Manipuler les racines carrées :

✱ EXERCICE 7 (★)

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = 4\sqrt{24} - 5\sqrt{96} + 4\sqrt{54}$	3. $C = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$
2. $B = \left(\sqrt{7-2\sqrt{6}} + \sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2$	4. $D = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

✱ EXERCICE 8 (★)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x^2 + 9} = 5$.	4. $x^2 - 4 > 5$
2. $\sqrt{x-4} > 2$.	
3. $\sqrt{x+5} > -1$.	5. $3 - x^2 \geq 2$

Manipuler les puissances :

✱ EXERCICE 9

Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$. Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \frac{2^{1/2} \times 4^2}{8^{1/6}}$.	4. $D = \frac{x^6}{(x^{-2})^3}$,
2. $B = \frac{x^{\ln(x)}}{e^{\ln(x)^2}}$ (pour $x > 0$).	5. $E = \frac{x^{-3}y^2}{(xy^{-1})^4}$.
3. $C = x^{-1} \times \frac{x^9}{x^5}$,	

✱ EXERCICE 10 (★)

1. Écrire les résultats sous la forme 3^n

$$(a) \ A = 9 \times 3^k \quad \left| \quad (b) \ B = \frac{3^k}{9} \quad \right| \quad (c) \ C = \frac{(3\sqrt{3})^4}{(3^2 \times 3)^2}$$

2. Factoriser les expressions suivantes (n est un entier naturel) :

$$A = 9^{n+1} - 9^{n+2} - 3 \times 3^{2n}, \ B = \frac{2}{4^n} - 5 \times 2^{-2n-1} + 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}, \ C = 3^{2n}(-1)^n - (-9)^n.$$

✱ EXERCICE 11 (★)

Résoudre les inéquations suivantes, après avoir donné les ensembles sur lesquels elles sont définies :

$$1. \ x^{3/2} \leq 2. \quad \left| \quad 2. \ x^{4/3} \geq 4. \right|$$

Manipuler logarithme et exponentielle :

✱ EXERCICE 12 (★)

Résoudre les équations suivantes, après avoir donné les ensembles sur lesquels elles sont définies :

$$\begin{array}{l|l} 1. \ e^x = e^{3x-1} & 4. \ e^x + 6e^{-x} = 0. \\ 2. \ e^{3x+6} = 4. & 5. \ \ln(x) + 2 = 0. \\ 3. \ e^{x^2-1} = 1. & 6. \ \ln(x) - \ln(x-1) = 1. \end{array}$$

✱ EXERCICE 13 (★)

Résoudre les inéquations suivantes, après avoir donné les ensembles sur lesquels elles sont définies :

$$\begin{array}{l|l} 1. \ 1 + 2\ln(x) > 0. & 3. \ e^x - 2e^{-x} < 0. \\ 2. \ \ln(x)^2 < 4. & 4. \ \frac{e^x - 2}{e^{-x}(-e^x + 3)} > 0. \end{array}$$

Manipuler les valeurs absolues :

✱ EXERCICE 14 (★)

Exprimer sans le symbole valeur absolue, selon les valeurs de x , les expressions suivantes :

$$A = |x + 1| \quad B = |1 - 2x| \quad C = 3|2x + 5| + |x + 2|$$

✱ EXERCICE 15 (★)

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{array}{l|l} 1. \ |2x + 3| = 1 & 3. \ |4x - 3| > 2. \\ 2. \ |-x + 4| = 7. & 4. \ |4x + 2| \leq 1. \end{array}$$

✱ EXERCICE 16 (★)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

$$1. \ |x| = 5 \quad \left| \quad 2. \ |x+1| - 1 = |x-1| \quad \right| \quad 3. \ |x+1| \leq 3$$

✱ EXERCICE 17 (★★)

Écrire sans valeur absolue l'expression suivante : $|x^2 - 1| - |x^2 + 1| + |2x^2 - x + 1|$ ($x \in \mathbb{R}$).

✱ EXERCICE 18 (★★)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

$$\begin{array}{l|l} 1. \ \frac{|x^2 - 1| + |x - 3|}{4} = & 2. \ |5x + 3| > -4 \\ & 3. \ |2x - 1| \leq |x - 1| \end{array}$$

✱ EXERCICE 19 (★★)

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Montrer que la dérivée de la fonction $f : x \rightarrow \ln(|x^2 - 1|)$ est

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

Manipuler la partie entière :

✱ EXERCICE 20 (★)

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-4}$.

✱ EXERCICE 21 (★)

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$1. \ |x - 3| = 2. \quad \left| \quad 2. \ |5x + 6| > 4. \right|$$

✱ EXERCICE 22 (★)

Soit une suite (u_n) vérifiant $|u_n - e| < \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Déterminer un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de e à 10^{-3} près.

*** EXERCICE 23 (**)**

Calculez selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$

$$G(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor.$$

*** EXERCICE 24 (***)**

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $p\lfloor x \rfloor = \lfloor px \rfloor$.
2. Montrer que pour tous réels x, y , $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.