. ❋ **Exercice 1**

Montrer par récurrence les énoncés suivants :

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.
2. Pour tout entier $n \geqslant 5$, $2^n > n^2$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers naturels a_n et b_n tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n\sqrt{2} + b_n$.

❋ **Exercice 2**

Ecrire les sommes suivantes en extension, puis les calculer :

- $\sum_{k=2}^{4} \frac{1}{3k}$
- $\sum_{k=2}^{5} k$
- $\sum_{k=1}^{4} (k+1)$
- $\sum_{k=0}^{3} 2k$
- $\sum_{k=0}^{2} k(2-k)$
- $\sum_{k=2}^{2} k$
- $\sum_{k=0}^{3} 2^k$
- $\sum_{k=0}^{3} 2^{3-k}$
- $\sum_{k=0}^{5} 3$

❋ **Exercice 3**

Ecrire avec le symbole $\sum$ les expressions suivantes.

- $A = 1^3 + 2^3 + \cdots + 11^3 + 12^3$.
- $B = 1 - 2 + 3 - \cdots - 98 + 99 - 100$.
- $C = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{25}{26} + \frac{26}{27}$.
- $D = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$.

❋ **Exercice 4**

Calculer les sommes suivantes. (n est un entier naturel)

1. $A = \sum_{k=0}^{5} (3k^2 - 2k + 1)$.
2. $B = \sum_{k=2}^{6} (k^3 + k)$.
3. $S_n = \sum_{k=0}^{n} (3^k - 2k^2)$.
4. $T_n = \sum_{k=1}^{n} (2 \times 5^k + 5 \times 2^k)$.
5. $U_n = \sum_{k=0}^{n} \left(5^k \times \frac{(4^2)^k}{2^{k+1}}\right)$.

❋ **Exercice 5**

Montrer par récurrence les énoncés suivants :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n+1} k2^{k-1} = n2^{n+1} + 1$.

❋ **Exercice 6**

Calculer la somme $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^2$.

❋ **Exercice 7**

1. Déterminer a et b réels tels que pour tout entier k supérieur à 2, $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k}$
2. En déduire pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.

❋ **Exercice 8**

Calculer les sommes suivantes à l'aide d'un changement d'indice :

$$\sum_{k=2}^{n+1} k^2 - 2k + 1 (\text{ on pose } j = k-1), \quad \sum_{k=1}^{n} n - k + 1 (\text{ on pose } i = n-k+1)$$

❋ **Exercice 9**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier l'expression de $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ à l'aide d'un télescopage.

❋ **Exercice 10**

Ecrire les produits suivants en extension et les calculer

$$\prod_{k=1}^{5} k \qquad \prod_{k=1}^{3} k^2 \qquad \prod_{k=2}^{4} (k^2 - k - 2) \qquad \prod_{k=1}^{6} (2k)$$

❋ **Exercice 11**

On pose $A = 2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$ et $B = 1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Exprimer A à l'aide de factorielles.
2. Que vaut $A \times B$? En déduire une expression de B en termes de factorielles.

❋ **Exercice 12**

Soit n un entier strictement positif. On considère le produit : $P_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{k})$.

Montrer que P_n s'exprime très simplement en fonction de n. En déduire la valeur de $Q_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{1}{k})$.