CHAPITRE 3

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

I. PROPRIÉTÉS REMARQUABLES D'UNE FONCTION

I. 1 MONOTONIE D'UNE FONCTION

Définition 1.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- f est **croissante** sur I si :
- f est **strictement croissante** sur I si :
- f est **décroissante** sur I si :
- f est **strictement décroissante** sur I si :
- f est **monotone** si f est croissante ou décroissante sur I.
- f est **strictement monotone** si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Autrement dit, une fonction croissante **conserve l'ordre** et une fonction décroissante **inverse l'ordre**.

Exercice 1

Que peut-on dire de la monotonie des fonctions affines ?

I. 2 MAJORATION, MINORATION

Définition 1.2

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$. On dit que :

- f est **majorée** sur D si

  Dans ce cas, on dit que M est un **majorant** de la fonction f.
- f est **minorée** sur D si

  Dans ce cas, on dit que m est un **minorant** de la fonction f.
- f est **bornée** sur D si elle est majorée et minorée.

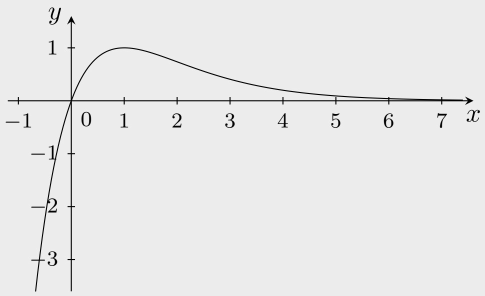
Autrement dit, une fonction est majorée (resp. minorée) si elle est « toujours plus petite » (resp. « toujours plus grande ») qu'une valeur fixée.

Exemple :

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$. Alors 1 est un minorant de f car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1 \geq 1$.

Exercice 2

On considère une fonction f dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



En utilisant la représentation graphique, la fonction f semble-t-elle

1. majorée sur $\mathbb{R}$? Si oui, déterminer tous les majorants et le plus petit d'entre eux.
2. minorée sur $\mathbb{R}$? sur $[1, +\infty[$? Si oui, déterminer tous les minorants.
3. bornée sur $\mathbb{R}$? sur $[1, +\infty[$?

Remarques :

R1 – Un majorant ou un minorant n'existe donc pas toujours. La fonction précédente n'a pas de minorant sur $\mathbb{R}$.

R2 – Un majorant ou un minorant, lorsqu'il existe, n'est jamais unique. En effet, si M majore une fonction f, alors tout réel plus grand que M majore aussi f. De même si m minore la fonction f, alors tout réel plus petit que m minore également f.

Attention:

L'existence ou non de majorant ou minorant dépend de l'intervalle sur lequel on étudie la fonction (cf. question 2 de l'exercice précédent). **Il est donc toujours important de préciser l'intervalle d'étude**.

Définition 1.3

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, et x_0 un point de A. On dit que :

- On dit que f admet un maximum en x_0 sur A si :
- On dit que f admet un minimum en x_0 sur A si :
- On dit que f admet un extremum en x_0 sur A si f admet un maximum ou un minimum en x_0 sur A.

Exercice 3

Reprenons l'exercice précédent.

1. La fonction semble t-elle admettre un minimum sur $[0, 3]$? $[3, +\infty[$? Qu'en déduit-on ?
2. La fonction semble t-elle admettre un maximum sur $[0, 3]$?

Attention:

Un maximum (resp. un minimum) d'une fonction (quand il existe) est un majorant (resp. un minorant). La réciproque est fausse .

I. 3 Parité d'une fonction

Définition 1.4

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que A est symétrique par rapport à zéro si pour tout $x \in A$, $-x \in A$.

Exemple :

$\mathbb{R}$, $[-1, 1]$ et $\mathbb{R}^*$ sont des ensembles symétriques par rapport à zéro mais $[2, +\infty[$ n'en est pas un.

Définition 1.5

Une fonction f est paire si :

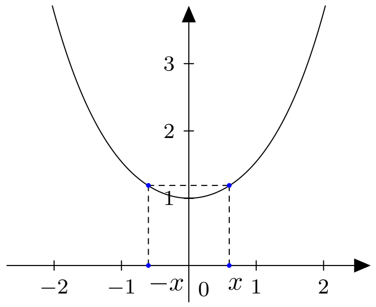
- $\mathcal{D}_f$ est symétrique p/r à 0.
-

Définition 1.6

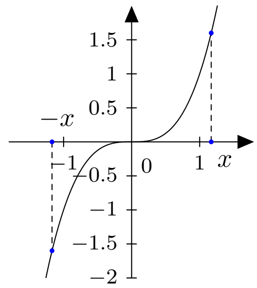
Une fonction f est impaire si :

- $\mathcal{D}_f$ est symétrique p/r à 0.
-

La courbe d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.**



La courbe d'une fonction impaire est **symétrique par rapport à l'origine.**



Remarque :

Les fonctions carré et valeur absolue sont paires. Les fonctions cube et inverse sont impaires. En effet :

Exemple :

La fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ est paire : $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 + 1 = (-1)^2x^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$.

Remarque :

Intérêt pratique de cette propriété de parité :
Il suffit d'étudier cette fonction seulement sur la moitié du domaine de définition $D_f \cap [0; +\infty[$ car par symétrie on en déduit l'étude sur $D_f \cap]-\infty; 0]$.

Exemple :

- $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ est une fonction paire.
  La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout réel x, $x^2 + 1 \neq 0$. Son domaine de définition est donc symétrique.

  Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x)$$

La fonction f est donc paire.

- $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ n'est pas paire.
  La fonction g est définie pour tout x tel que $x - 2 \neq 0$, c'est à dire sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Or ce domaine n'est pas symétrique car $-2 \in D_g$ mais $2 \notin D_g$. La fonction g n'est ni paire, ni impaire.

Attention:

Il existe des fonctions qui ne sont ni paire, ni impaire.

II. Rappels sur les dérivées

Nous rappelons dans cette section les méthodes de calcul des dérivées usuelles. On étudiera en détail au deuxième semestre la notion de dérivée d'une fonction d'une manière plus théorique. D'ici là, il est important de savoir calculer la dérivée d'une fonction et d'étudier les variations d'une fonction à l'aide du signe de cette dérivée.

II. 1 Dérivées des fonctions usuelles

Voici le tableau des dérivées usuelles. D_f est l'ensemble de définition de la fonction et $D_{f'}$ l'ensemble où la fonction est dérivable.

Fonction f	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
$x \longrightarrow k \quad (k \in \mathbb{R})$			
$x \longrightarrow x$			
$x \longrightarrow x^2$			
$x \longrightarrow x^3$			
$x \longrightarrow x^n \quad (n \in \mathbb{N})$			
$x \longrightarrow \dfrac{1}{x}$			
$x \longrightarrow \mathrm{e}^x$			
$x \longrightarrow \ln(x)$			
$x \longrightarrow \sqrt{x}$			

II. 2 Règles de dérivation

On rappelle aussi les règles de dérivation d'une somme, d'un produit et d'un quotient de fonctions dérivables. Pour les deux dernières formules, on suppose que la fonction au dénominateur ne s'annule pas.

$(u+v)' =$	$(uv)' =$
$\left(\frac{1}{u}\right)' =$	$\left(\frac{u}{v}\right)' =$

Exemple :

Donner la dérivée de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^x$.

Proposition 2.1

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors la fonction e^u est dérivable sur I et

$$(e^u)' =$$

Exemple :

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) =$.
- La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) =$.
- La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) =$.

Proposition 2.2

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et

$$\ln(u)' =$$

Exemple :

La fonction définie par $f(x) = \ln(x^2+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > 0$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) =$$

Proposition 2.3

Soit α un réel, alors f_α, la fonction puissance α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout x réel strictement positif, on a

$$f'_\alpha(x) =$$

Proposition 2.4

Soit α un réel, et u une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. u^α est dérivable sur I et

$$(u^\alpha)' =$$

Exemple :

La fonction f définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = x^{3/2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) =$.

Proposition 2.5

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et

$$(\sqrt{u})' =$$

Remarque :

On retrouve ce résultat ce résultat à l'aide de la proposition 2.4. En effet :

II. 3 Dérivation et étude de variations

Proposition 2.6

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est **constante** sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ **et ne s'annule qu'en un nombre fini de points** alors f est **strictement croissante** sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ **et ne s'annule qu'en un nombre fini de points** alors f est **strictement décroissante** sur I.

Exercice 4

Etudier le sens de variation de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^x$.

Proposition 2.7

Si $\alpha > 0$, alors la fonction puissance α est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $\alpha < 0$, alors la fonction puissance α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

II. 4 Dérivées et tangentes.

Rappel :
Soit f une fonction définie sur D_f. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Soit $a \in D_f$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est une droite qui "touche" la courbe au plus près au voisinage de ce point.

On reviendra plus tard sur cette notion pour la définir "plus proprement". Pour le moment, il faut bien noter que comme la tangente est droite, c'est la représentation graphique d'une fonction affine.

Proposition 2.8

Soit f une fonction définie et dérivable sur un ensemble $\mathcal{D}$. Soit $a \in \mathcal{D}$. Alors l'équation de la tangente au point d'abscisse a est :

$$y =$$

Exemple :

Soit f la fonction exponentielle. Alors f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) =$. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est :

$$y = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

II. 5 Obtention d'inégalités

Une des applications des études de variations est l'obtention de certaines inégalités.

Exercice 5

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$. Interpréter graphiquement ce résultat.

III. Composition de fonctions

Définition 3.1

Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions. On appelle **composée de f par g**, et on note, $g \circ f$ la fonction définie par

$$\forall x \in E,\ (g \circ f)(x) =$$

Schéma

Remarque :

On obtient ainsi une nouvelle fonction : $\quad g \circ f : E \longmapsto G.$.

Exemple :

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = x + 3$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = (x^2 + 1) + 3 = x^2 + 4.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 3) = (x + 3)^2 + 1 = x^2 + 6x + 10.$$

Attention:

On remarque sur l'exemple précédent que $f \circ g \neq g \circ f$.

Remarque :

Soient les deux fonctions :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x}. \end{array}$$

L'ensemble d'arrivée de f est $\mathbb{R}$, tandis que l'ensemble de départ de g est $\mathbb{R}_+$. La fonction $g \circ f$ n'est donc pas bien définie ici. Quelle fonction f faut-il considérer ?

Pour pouvoir composer deux fonctions, il faut que l'ensemble d'arrivée de la première fonction soit le même (ou inclus dans) que celui de départ de la deuxième. Ici on veut donc que la fonction f prennent ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On va considérer la fonction

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & -x \end{array}$$

Remarque :

Pour déterminer l'ensemble de définition de $g \circ f$ il suffit de chercher les réels $x \in \mathcal{D}_f$ tels que $f(x) \in \mathcal{D}_g$.

Exercice 6

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2 - 4$. Donner les ensembles de définition de f et g puis donner les ensembles de définition de $g \circ f$ et de $f \circ g$ ainsi que leurs expressions. Que remarque t-on ?

Savoir-faire exigibles :

- Savoir les définitions d'ensemble-image, monotonies, majoration etc.
- Savoir étudier les variations d'une fonction : Domaine de définition, dérivée, monotonie, ensemble-image.
- Savoir étudier la parité d'une fonction.
- Savoir tracer l'allure d'une courbe après étude de ses variations, propriétés.
- Connaître la définition d'une composition de fonctions et déterminer son ensemble de définition