CHAPITRE 4

MATRICES

I. GÉNÉRALITÉS SUR LES MATRICES

I. 1 DÉFINITIONS, EXEMPLES.

Dans toute la suite, n et p seront deux entiers naturels non nuls.

Notation : Soient $i, j \in \mathbb{Z}$ tels que $i \leq j$. On note $[\![i\,;\,j]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre i et j.

Définition 1.1

- On appelle **matrice réelle à n lignes et p colonnes** (ou encore **matrice réelle de taille $n \times p$**) tout tableau de nombres réels à n lignes et p colonnes.
  Ces $n \times p$ nombres réels sont appelés **les coefficients** de la matrice.

- On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à n lignes et p colonnes.

- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Le coefficient de A situé sur la i-ème ligne $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et la j-ème colonne $(1 \leqslant j \leqslant p)$ est habituellement noté $a_{i,j}$. On écrit alors

$$A = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}\right\}}_{p \text{ colonnes}} n \text{ lignes} \quad \text{ou } A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}.$$

- Soit $j \in [|1;p|]$. On appelle j^{eme} vecteur colonne de A le vecteur $C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \dots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$

- Soit $i \in [|1;n|]$. On appelle i^{eme} vecteur ligne de A le vecteur $L_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,p} \end{pmatrix}$

Remarque :

Si la matrice est notée B (resp. C,D ...), ses coefficients sont notés $b_{i,j}$ (resp. $c_{i,j}$, $d_{i,j}$...).

Exemple :

Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Alors $A \in$, $a_{1,1} =$ et $a_{3,2} =$, $L_2 =$ et $C_1 =$

Définition 1.2

La matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée la **matrice nulle de taille $n \times p$** et est notée $0_{n,p}$.

Exemple :

On a $0_{3,2} =$

Définition 1.3

Deux matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont lorsqu'elles sont de même taille et qu'elles ont les mêmes coefficients :

Définition 1.4

On considère une matrice de taille $n \times p$.

- Lorsque $n = 1$, on parle de **matrice ligne**.
  Une matrice ligne est de la forme : $A = (a_j)_{1 \leqslant j \leqslant p} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix}$.
- Lorsque $p = 1$, on parle de **matrice colonne**.

  Une matrice colonne est de la forme : $A = (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Exemple :

Que peut on dire des matrices suivantes ? $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

I. 2 Transposée d'une matrice

Définition 1.5

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On appelle **matrice transposée de** A la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, notée ${}^tA$, définie par ${}^tA = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ où pour tout i de $[\![1\,;\,p]\!]$ et tout j de $[\![1\,;\,n]\!]$ on ait :

$$b_{i,j} = a_{j,i}$$

Remarque :

- La première ligne de A est la première colonne de ${}^tA$, la seconde ligne de A est la seconde colonne de ${}^tA$...
- Il faut bien noter que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ alors ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Alors ${}^tA =$

I. 3 Matrices carrées

Définition 1.6

- On appelle **matrice carrée d'ordre** n toute matrice de taille $n \times n$. Une matrice carrée d'ordre n est de la forme :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- Les coefficients $(a_{i,i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont appelés **les coefficients diagonaux** de A et ils constituent **la diagonale** de A.

- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$) **l'ensemble des matrices carrées d'ordre** n.

Remarque :

Lorsque $n = p$, on note souvent $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ au lieu de $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

Exemple :

Que peut on dire de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$?

Matrices carrées particulières

Définition 1.7

La matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients diagonaux qui valent tous 1 est appelée la **matrice identité d'ordre** n et est notée I_n.

Exemple :

La matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est

Définition 1.8

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée d'ordre n. On dit que la matrice A est **diagonale** lorsque tous ses coefficients non diagonaux sont nuls, c'est-à-dire lorsqu'elle est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On a alors :

Attention:

On parle de matrices diagonales **uniquement** pour des matrices carrées.

Définition 1.9

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée d'ordre n.

- On dit que la matrice A est **triangulaire supérieure** lorsque tous ses coefficients situés en-dessous de la diagonale sont nuls, c'est-à-dire lorsqu'elle est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

  On a alors :

- On dit que la matrice A est **triangulaire inférieure** lorsque tous ses coefficients situés au-dessus de la diagonale sont nuls c'est-à-dire lorsqu'elle est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

  On a alors :

Attention:

On parle de matrices triangulaires supérieures ou inférieures **uniquement** pour des matrices carrées.

Exemple :

Que peut-on dire des matrices suivantes ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Définition 1.10

Une matrice **carrée** d'ordre n notée A est dite **symétrique** si pour tous $1 \leq i, j \leq n$, $a_{i,j} = a_{j,i}$.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique.

Proposition 1.11

Une matrice carré est symétrique si et seulement si

II. Opérations matricielles

II. 1 Produit d'une matrice par un réel

Définition 2.1

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un nombre réel.
On appelle **produit de** A **par** λ et on note $\lambda \cdot A$ ou λA l'élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ défini par

$$\lambda \cdot A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}.$$

Autrement dit,

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \dots & \lambda a_{1,p} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \dots & \lambda a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \lambda a_{n,2} & \dots & \lambda a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Remarques :

R1 – Le produit d'une matrice par un réel est une matrice de même taille que la matrice initiale.
R2 – On multiplie tous les coefficients de la matrice par le réel λ.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 1/2 \end{pmatrix}$. Alors $2A =$.

Définition 2.2

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
On appelle **matrice opposée de** A et on note $-A$ l'élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ défini par $-1 \times A$:

$$-A = (-a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}.$$

Exemple :

Reprenons l'exemple précédent. On a $-A =$

Proposition 2.3 — Propriétés du produit par un réel

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$; λ et μ deux réels. On a

Associativité :

1 **est l'élément neutre :**

Distributivité :

II. 2 Somme de deux matrices

Définition 2.4

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

La **somme de** A **et** B, notée $A+B$, est l'élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ défini par $A+B = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ où pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ et tout $j \in [\![1\,;\,p]\!]$,

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

Autrement dit,

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \dots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \dots & a_{2,p}+b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & a_{n,2}+b_{n,2} & \dots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}$$

Remarques :

R1 – Pour pouvoir sommer deux matrices, **il faut qu'elles aient la même taille**. La somme a alors la même taille que les deux matrices initiales.

R2 – La sommation se fait coefficient par coefficient.

Exemple :

On reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 1/2 \end{pmatrix}$, et on note $B = \begin{pmatrix} 2 & 2/3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Alors $2A + B =$

Proposition 2.5 — Propriétés de la somme

Soient A, B et C trois éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a

Associativité :

Commutativité :

$0_{n,p}$ **est l'élément neutre :**

Tout élément a un opposé :

Autrement dit, la somme de matrices et le produit de matrice par un réel sont des opérations ayant les mêmes propriétés que la somme et produit de nombres réels.

II. 3 **Produit de matrices**

1. Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Définition 2.6 — Matrice Ligne × Matrice Colonne

Le produit d'une matrice ligne et d'une matrice colonne est défini par

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} =$$

Remarques :

- **R1 –** Pour pouvoir multiplier une matrice ligne par une matrice colonne, il faut que la longueur de la matrice ligne soit égale à la hauteur de la matrice colonne.
- **R2 –** Quand il est bien défini, le produit d'une matrice ligne et d'une matrice colonne est un nombre réel.
  C'est à dire que si $A \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ alors $AB \in \mathbb{R}$.

Exemple :

On a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} =$

2. Produit de deux matrices

Dans la suite, q et r sont des entiers naturels non nuls.

Définition 2.7

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ un élément de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
On appelle **produit de** A **par** B et on note $A \times B$ ou AB l'élément de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ défini par

$$A \times B = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$$

où pour tout i de $[\![1\,;\,n]\!]$ et tout j de $[\![1\,;\,q]\!]$, $c_{i,j}$ est égal au produit de la i^{eme} ligne de A avec la j^{eme} colonne de B.

Attention:

Le produit matriciel s'écrit plutôt AB que $A \times B$.

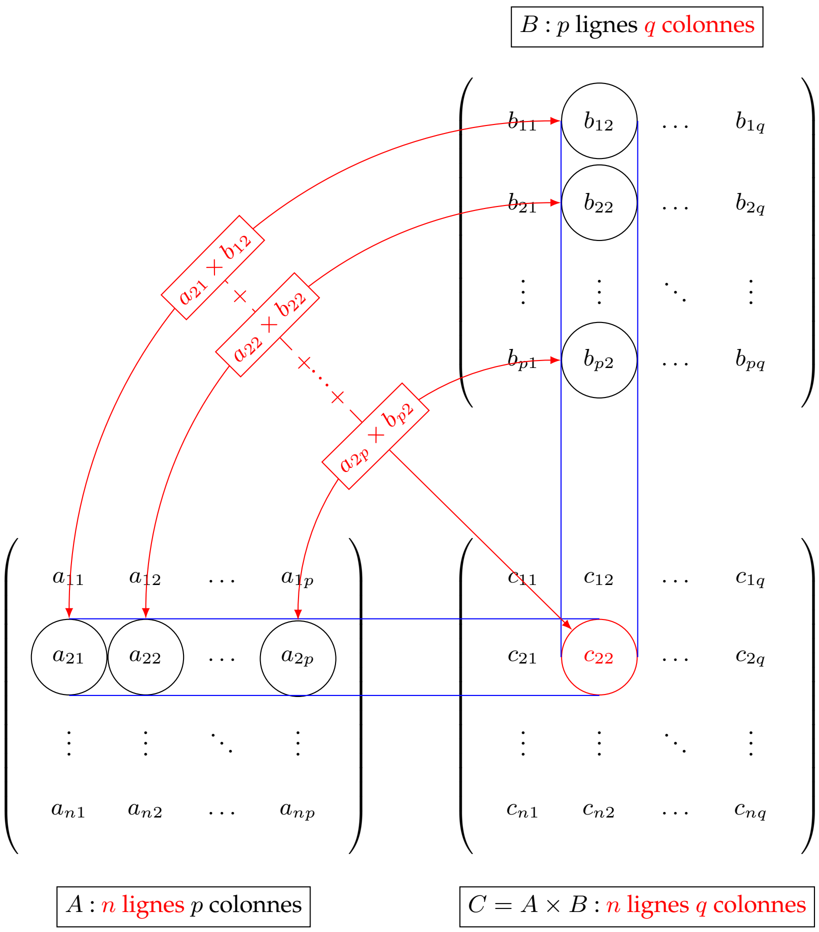
Remarques :

- **R1 –** Le **nombre de colonnes** de A doit être égal au **nombre de lignes** de B.
- **R2 –** Il est important de bien connaitre la formule liée aux tailles :

$$\boxed{(\text{Taille } n \times p) \times (\text{Taille } p \times q) = \text{Taille } n \times q}$$

Remarque :

Calculer un produit de matrices est plus simple en utilisant la configuration suivante :



Exemple :

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Calculer, si cela est possible, AB et BA.
Que remarque t-on ?

Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Calculer, si cela est possible, AB et BA. Que remarque t-on ?

Exercice 2

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer AB.
2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AC et BC.
2. Que peut-on en déduire ?

Retenir

Dans des exercices théoriques, il est important de connaitre la formule donnant $c_{i,j}$:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Remarque :

Dans le cas où l'on manipule uniquement des matrices carrées (de même taille n), le produit de matrices est alors toujours défini et on obtient une matrice carrée de taille n.

Proposition 2.8 — Propriétés du produit de matrices

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, C et D deux éléments de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ et E un élément de $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$. Soit λ un réel.

1. **Associativité :** .
2. **L'identité est neutre à gauche et à droite :**
3. **Distributivité :** .
4. $\lambda \cdot (AC) =$

Attention:

Le produit de matrices **ne vérifie pas** certaines propriétés du produit de nombres :

1. Le produit AB peut être défini et le produit BA ne pas être défini (exemple précédent)
2. Même si les produits AB et BA sont définis, ils peuvent être différents (exemple précédent).
3. On peut avoir $AB = 0$ sans avoir $A = 0$ ou $B = 0$ (voir TD)
4. On peut avoir $AC = BC$ sans avoir $A = B$ (voir TD)

II. 4 Opérations matricielles et transposée

Proposition 2.9

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- ${}^t({}^tA) =$
- ${}^t(A + B) =$
- ${}^t(\lambda A) =$

Exercice 4

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

1. Calculer ${}^t(AB)$.
2. Peut-on calculer ${}^tA{}^tB$?

Proposition 2.10

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Alors

$${}^t(AB) =$$

Attention:

Il faut bien vérifier les tailles des différentes matrices quand on applique le résultat précédent.

III. Matrices carrées et puissances

Si on manipule uniquement deux matrices carrés de tailles n notées A et B, alors les produits AB et BA **sont toujours définis** (on a le même nombre de lignes et colonnes pour les deux matrices). On a par contre déjà vu qu'ils pouvaient être différents.

Définition 3.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pose $A^0 =$ et pour $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle **puissance p-ième de la matrice** A et on note A^p l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$A^p =$$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $A^0 =$, $A^1 =$

$A^2 =$ $A^3 =$

Proposition 3.2

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p, q \in \mathbb{N}$.
On a :

$$A^{p+q} = \qquad .$$

Attention:

Il faut faire attention quand on factorise des puissances de matrices, par exemple si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$A^2 + A = A(\qquad) = (\qquad)A$. « L'équivalent » de la constante 1 est la matrice identité.

Méthode :

Il est souvent demandé dans les exercices l'expression explicite de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$. Il existe (au moins) 3 cas dans lesquels il est facile de donner une expression explicite des puissances d'une matrice.

- Le cas où la matrice est diagonale.
- Le cas où on peut conjecturer une expression démontrer celle-ci par récurrence.
- Le cas où on peut déterminer une relation polynomiale liée à cette matrice.

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Déterminer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Retenir

Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{1,1}^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2}^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n}^n \end{pmatrix}$$

Exercice 6

Conjecturer et démontrer par récurrence une expression explicite des puissances de A pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Exprimer A^2, A^3 et A^4 en fonction de A.
2. Déterminer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

SAVOIR-FAIRE EXIGIBLES :

- Connaître les différents types de matrices, les ensembles de matrices.
- Savoir faire la somme de deux matrices, le produit d'une matrice par un réel, par une autre matrice.
- Savoir calculer (dans certains cas) les puissances d'une matrice.