CHAPITRE 5

GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

I. GÉNÉRALITÉS

I. 1 DÉFINITION

Définition 1.1

Une suite réelle u est une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{N}$ (souvent $\mathbb{N}$, ou $\mathbb{N}^*$) dans $\mathbb{R}$, qui à tout entier n de I associe $u(n)$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n au lieu de $u(n)$.
- la suite u est généralement notée $(u_n)_{n\in I}$.

Remarques :

R1 – L'entier n est appelé l'indice (ou le rang).

R2 – u_n est le terme de rang n.

R3 – Le premier terme d'une suite n'est pas forcément u_0. Par exemple la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$ n'est définie que pour $n \geq 1$.

R4 – Si la suite est définie sur $\mathbb{N}$, on la note parfois $(u_n)_{n\geq 0}$ au lieu de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Attention:

Les parenthèses ont leur importance : (u_n) désigne **la suite** alors que u_n désigne **un terme** de la suite (le terme de rang n).

I. 2 MODES DE GÉNÉRATION D'UNE SUITE

Il existe plusieurs manières de définir une suite. En voici deux déjà rencontrées au lycée.

1. Définition explicite

Définition 1.2 — Suite explicite

Soient n_0 un entier naturel et f une fonction définie sur un intervalle contenant $[n_0, +\infty[$. On peut définir une suite u en posant pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n = f(n)$.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie pour $n \geq 0$ par $u_n = \sqrt{2n+3}$. On a $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x+3}$. On a :

- $u_0 =$
- $u_1 =$
- $u_2 =$
- $u_{100} =$

Remarque :

On peut calculer facilement tous les termes d'une suite définie de manière explicite.

2. Définition par récurrence

Définition 1.3 — Suite définie par récurrence

Une suite est définie par récurrence si l'on connait son premier terme et une relation de récurrence entre deux termes consécutifs.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 2$ pour tout $n \geq 0$. Cette suite est définie par récurrence.

Le calcul des termes de cette suite se fait « pas à pas » :

- $u_1 = 2u_0 + 2 = 2$
- $u_2 = 2u_1 + 2 = 6$

Pour calculer u_{100}, il est à priori nécessaire de calculer tous les termes précédents. L'utilisation d'un outil informatique a alors un grand intérêt.

Remarque :

On peut construire une suite par récurrence à l'aide d'une fonction f de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathcal{D}_f \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Il faut dans ce cas vérifier que chaque terme de la suite est bien défini, c'est à dire que $\forall n \geq 0,\ u_n \in \mathcal{D}_f$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie pour tout $x \in [2, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-2}$. La suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

est-elle bien définie ?

Exercice 2

Montrer que la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + 2 \end{cases}$ est bien définie.

I. 3 Sens de variation d'une suite

Définition 1.4

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite.

- On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est **croissante** si :
- On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est **décroissante** si :
- On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est **monotone** si

Remarques :

R1 – La définition s'adapte facilement si le premier indice de la suite n'est pas 0.

R2 – On obtient les définitions d'une suite strictement croissante, décroissante ou monotone en remplaçant les inégalités larges par des strictes.

Méthode :

Monotonie d'une suite explicite :
Soit f une fonction définie sur $[n_0, +\infty[$ où $n_0 \in \mathbb{N}$. Si u est la fonction définie pour tout $n \geq n_0$ par $u_n = f(n)$, alors :

- Si f est croissante, u aussi.
- Si f est décroissante, u aussi.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = n^3 + n - 10$. Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Méthode :

Par soustraction :
La méthode usuelle pour montrer qu'une suite est croissante est la suivante :

- On calcule $u_{n+1} - u_n$ pour $n \geq 0$ (**quelconque**).
- On factorise si possible puis on étudie le signe de cette quantité.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n^2}{2} \end{cases}$$

Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

Méthode :

Par division :
Pour étudier le sens de variation d'une suite à termes **strictement positifs**, on peut comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, la suite est décroissante.
- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, la suite est croissante.

Ceci est très pratique pour les suites dont le terme général contient un puissance ou un produit.

Exercice 5

Etudier le sens de variation de $(u_n)_{n\geq 1}$, où $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

Méthode :

Par récurrence :
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par $u_0 \in D_f$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Les variations de f permettent d'établir par récurrence les variations de la suite.

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = e^{u_n} + u_n$. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

II. Suites arithmétiques

Dans toute la suite, on considère des suites où le premier indice est 0 (les énoncés sont facilement adaptables si le premier indice n'est pas 0).

II. 1 Définition et premières propriétés

Définition 2.1

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est **arithmétique** lorsqu'il existe un réel r tel que

Le réel r est alors appelé de la suite arithmétique $(u_n)_{n\geq 0}$.

Autrement dit, une suite est arithmétique si on **ajoute toujours la même quantité** pour passer d'un terme au suivant.

Exemple :

Dans un cabinet comptable, chaque mois, 20 nouvelles fiches de clients s'ajoutent au fichier. Le premier mois de l'année, il y a 12000 fiches. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite. Que peut-on dire de cette suite ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre de fiche au n-ième mois. La suite ainsi définie vérifie la relation

$$u_{n+1} = u_n + 20$$

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc arithmétique, de raison 20 et de terme initial $u_1 = 12000$.

Méthode :

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on calcule la quantité $u_{n+1} - u_n$ (pour $n \geq 0$ **quelconque**) et montre que cette quantité est constante.

Exercice 7

Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+1} = 3v_n + 3^n$. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{v_n}{3^n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique.

Théorème 2.2

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison r. Alors

- $\forall n, p \in \mathbb{N}$, .
- En particulier : $\forall n \geq 0$, .

Exercice 8

Reprenons l'exercice 7.

1. Donner l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

II. 2 Monotonie

Proposition 2.3 — Variations

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est constante.

II. 3 Somme de termes consécutifs

Théorème 2.4

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison r et p, n deux entiers naturels avec $p \leq n$.
On a alors :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \qquad\qquad\qquad .$$

Retenir

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique = Nombre de termes fois demi-somme des extrêmes.

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite arithmétique définie par $u_0 = 3$ et de raison $r = 2$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} u_k$.

III. Suites géométriques

III. 1 Définition et premières propriétés

Définition 3.1

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est **géométrique** lorsqu'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n,

Le réel q est alors appelé de la suite géométrique $(u_n)_{n\geq 0}$.

Autrement dit, une suite est géométrique si on **multiplie toujours par la même quantité** pour passer d'un terme au suivant.

Exemple :

Une balle en caoutchouc est lâchée d'une hauteur de 100cm au-dessus du sol. Elle rebondit plusieurs fois et perd de l'énergie à chaque rebond. La hauteur atteinte à chaque rebond est égale au $\frac{9}{10}$ de la hauteur du précédent rebond. Modéliser à l'aide d'une suite la hauteur au $n-$ième rebond. Que peut-on dire de cette suite ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n la hauteur en centimètres de la balle au n-ième rebond. La suite ainsi définie vérifie la relation

$$u_{n+1} = 0,9u_n$$

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est donc géométrique, de raison $0,9$ et de terme initial $u_0 = 100cm$.

Méthode :

Pour montrer qu'une suite est géométrique, on a deux schémas de preuve :

1. on commence par calculer u_{n+1} (pour $n \geq 0$ **quelconque**) puis on utilise les données de l'énoncé pour montrer l'existence d'un réel q tel que $u_{n+1} = q \times u_n$.
2. **Si on sait que pour tout n, u_n est non nul,** on peut calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et on vérifie que ce rapport est constant.

Exercice 10

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et par $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$. On admet ici que pour tout n, $u_n > 1$ (Bon exercice). On pose alors $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln(u_n - 1)$. Montrer que $(v_n)_{n\geq 0}$ est géométrique.
2. Soit $(w_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $w_n = 3^n$. Montrer que $(w_n)_{n\geq 0}$ est géométrique

Théorème 3.2

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q. Alors :

- $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $u_n =$.
- En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n =$

Exercice 11

Reprenons l'exercice 10.
Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n. En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

III. 2 Monotonie

Proposition 3.3 — Variations

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q, et de terme initial $u_0 > 0$.

- Si $0 < q < 1$, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante .
- Si $q > 1$ alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
- Si $q = 1$, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est constante.
- Si $q < 0$, alors la suite n'est pas monotone.

III. 3 Somme de termes consécutifs

Théorème 3.4

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q et p et n deux entiers naturels avec $p \leq n$.

- Si $q \neq 1$, on a $\sum_{k=p}^{n} u_k =$
- Si $q = 1$, on a : $\sum_{k=p}^{n} u_k =$

Retenir

La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique, dont la raison est différente de 1, est

$$\text{premier terme} \times \frac{1 - \text{la raison}^{\text{nombre de termes}}}{\text{1 - la raison}}$$

Exercice 12

Reprenons l'exercice 10. Calculer $\sum_{k=3}^{10} v_k$.

IV. Suites arithmético-géométriques

Définition 4.1

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est **arithmético-géométrique** lorsqu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, .

Remarques :

R1 – L'ensemble des suites arithmético-géométriques contient les suites arithmétiques et les suites géométriques. En effet, lorsque $a = 1$, on obtient une suite arithmétique de raison b et lorsque $b = 0$, on obtient une suite géométrique de raison a.

R2 – Le premier indice de la relation de récurrence peut ne pas être 0.

Théorème 4.2

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmético-géométrique définie comme ci-dessus.

- Si $a = 1$ alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique de raison b.
- Si $a \neq 1$ et x est le réel vérifiant $x = ax + b$, alors la suite $(u_n - x)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison a.

Remarque :

> La suite $(u_n - x)_{n\geq 0}$ est la suite dont les termes sont : $u_0 - x$, $u_1 - x$, $\dots$.

Méthode :

Pour obtenir la forme explicite d'une suite arithmético-géométrique (u_n)(si $a \neq 1$), on utilisera le théorème 4.2 pour se ramener à une suite géométrique :

1. On résout l'équation $x = ax + b$. On trouve une solution ℓ.
2. On montre que la suite définie par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison a, et on donne alors son expression.
3. On donne ensuite l'expression de u_n.

Exercice 13

Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

V. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 5.1

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est **récurrente linéaire d'ordre 2** lorsqu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

Remarque :

> Pour calculer un terme d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, on a besoin des deux termes précédents.

Exemple :

> La suite de Fibonacci est définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Cette suite est récurrente linéaire d'ordre 2 et
>
> - $u_2 = u_1 + u_0 = 1$
> - $u_3 = u_2 + u_1 = 2$

Comme pour les différents types de suites étudiées précédemment, on cherche à obtenir une expression des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Définition 5.2

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie comme ci-dessus.
On appelle **équation caractéristique** de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ l'équation   d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Notation : On note $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples de réels. C'est-à-dire :

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$$

Théorème 5.3

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie comme ci-dessus avec $b \neq 0$.
On note Δ le discriminant de son équation caractéristique.

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2.
Le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est donné pour tout $n \geq 0$ par

$$u_n = \lambda(r_1)^n + \mu(r_2)^n$$

- Si $\Delta = 0$ alors son équation caractéristique admet une unique solution r_0.
Le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est donné pour tout $n \geq 0$ par

$$u_n = (\lambda + \mu n)(r_0)^n$$

Remarque :

Si $\Delta < 0$ alors son équation caractéristique n'admet pas de solution réelle. L'expression explicite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est alors hors-programme.

Méthode :

Pour obtenir le terme général d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

1. On cherche les solutions de son équation caractéristique,
2. On obtient la forme du terme général à l'aide du théorème 5.3,
3. On utilise les valeurs des deux premiers termes de la suite pour obtenir un système de deux équations à deux inconnues dont les solutions sont les paramètres λ et μ.

Remarque :

Si le premier indice de la suite n'est pas zéro, on adapte facilement la méthode.

Exercice 14

On considère la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n$. Donner l'expression de cette suite en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

VI. Puissances d'une matrice et suites récurrentes

Dans certains cas, on travaille avec plusieurs suites récurrentes qui sont liées.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}$ deux suites telles que $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ $w_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - w_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 2w_n \\ w_{n+1} = w_n \end{cases}$$

Calculer u_1, v_1 w_1, u_2 v_2 et w_2.

Méthode pour trouver les expressions de ces suites

Supposons que deux suites (u_n), (v_n) (w_n) soient données par leur premier terme u_0, v_0, w_0 et les relations suivantes :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n + cw_n \\ v_{n+1} = du_n + ev_n + fw_n \\ w_{n+1} = gu_n + hv_n + iw_n \end{cases}$$

où $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ sont des réels fixés.

1. On pose alors $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On vérifie que le couple de relations qui définissent les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ est équivalent à la relation matricielle $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
4. Connaître A^n nous permet alors de calculer u_n et v_n en fonction de u_0, v_0 et de $n \in \mathbb{N}$.

Remarque :

On peut généraliser ce raisonnement pour un nombre quelconque de suites (seule la taille de la matrice augmentera ou diminuera).

Exercice 15

Donner le terme général des suites $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ de l'exercice précédent.