. ❋ **Exercice 1**

Donner le sens de variation des suites suivantes :

1. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$ par et $u_{n+1} = u_n - (n+1)\cdot$
2. $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$ par $v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{n^2+1}\cdot$
3. $(w_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour tout $n \geqslant 1$ par $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\cdot$

❋ **Exercice 2**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par un premier terme $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}\cdot$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

❋ **Exercice 3**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n}\cdot$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 3$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

❋ **Exercice 4**

Déterminer le terme général des suites définies de la manière suivante :

1. $a_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = 3$.
2. $b_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+1} = 5b_n$.
3. $c_1 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_{n+1} = c_n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{10} c_k$.
4. $d_0 = 3$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $2d_m = d_{m-1}$.

❋ **Exercice 5**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n^3$. Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire $v_n = \ln(u_n)$, $n \geqslant 0$.

1. Montrer que v_n est bien défini pour tout n.
2. Quelle est la nature de (v_n) ?
3. Déterminer l'expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.

❋ **Exercice 6**

On pose $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3+2u_n}{u_n+4}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.
2. Montrer que $u_{n+1} = 1 \Leftrightarrow u_n = 1$. En déduire que pour tout n, $u_n \neq 1$.

❋ **Exercice 7**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \dfrac{7u_n+6}{u_n+6}$ et soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n+2}{u_n-3}\cdot$

1. (a) Etudier le sens de variation de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{7x+6}{x+6}$ sur $]-6, +\infty[$.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont bien définis et que $2 \leqslant u_n < 3$ (on utilisera le sens de variation de f obtenu précédemment).
   (c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
2. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique. Déterminer l'expression de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} v_k$.

❋ **Exercice 8**

Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\alpha_0 = 3$, $\beta_0 = 1$ et vérifiant pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2\alpha_n + \beta_n) \\ \beta_{n+1} = \dfrac{1}{3}(\alpha_n + 2\beta_n). \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \alpha_n + \beta_n$ et $t_n = \alpha_n - \beta_n$.

1. Etudier la nature des suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire une expression de s_n et t_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression de α_n et β_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

❋ **Exercice 9**

Déterminer le terme général des suites définies de la manière suivante :

1. $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 6$.
2. $w_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} = -w_n - 2$.

❋ **Exercice 10**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$.

On introduit la suite auxiliaire $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}\cdot$

1. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmético-géométrique.

2. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

❋ Exercice 11

Déterminer le terme général des suites définies de la manière suivante :

1. $u_0 = -1$ et $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
2. $v_1 = 3$, $v_2 = 17$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+2} = 3v_{n+1} + 4v_n$.

❋ Exercice 12

On considère deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 = 1, y_0 = -1 \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n \\ y_{n+1} = 4x_n - y_n. \end{cases}$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$
2. Calculer le terme général de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire le terme général de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

❋ Exercice 13

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}$
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
3. Donner le terme général a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

❋ Exercice 14

On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définies par leurs premiers termes u_0 et v_0 et les relations suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - v_n$ et $v_{n+1} = -u_n + v_n$.

1. Montrer qu'il existe une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$
3. Conjecturer et démontrer une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire les expressions de u_n, v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, u_0 et v_0.