CHAPITRE 6

SYSTÈMES LINÉAIRES

I. GÉNÉRALITÉS

Définition 1.1

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
On appelle **système linéaire de n équations à p inconnues** (ou encore **système linéaire** $n \times p$) tout ensemble d'équations de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{rclc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p & = & b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p & = & b_2 & (L_2) \\ & \vdots & & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p & = & b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

où :

- les coefficients du système $a_{i,j}$ (avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$) sont des réels fixés.
- les coefficients du b_i (avec $1 \leq i \leq n$) sont des réels fixés.
- $x_1, \ldots, x_p$ sont réelles du système.

Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on appelle i**-ème ligne** et on note L_i la i-ème équation du système.

Exemple :

Le système suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rclc} 3x_1 + 6x_2 & = & -3 & (L_1) \\ -2x_1 + x_2 & = & 12 & (L_2) \end{array}\right.$$

est un système d'équations linéaires à équations et inconnues.

Définition 1.2

- On appelle tout p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ pour lequel les n équations du système sont vérifiées. **Résoudre le système**, c'est déterminer l'ensemble de ces solutions.
- Si un système (S) n'a pas de solution, on dit qu'il est
- Deux systèmes (S) et (S') sont dits lorsqu'ils ont le même ensemble solution. On note dans ce cas

Exercice 1

Le couple $(1, 1)$ est-il solution de l'exemple précédent ? et le couple $(-5, 2)$? Déterminer l'ensemble des solutions de ce système.

Exercice 2

Résoudre ces systèmes.

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 - 4x_2 & = & 8 \\ -x_1 + 2x_2 & = & -1 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 - 2x_2 & = & 0 \\ x_1 - x_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Retenir

Un système peut avoir une infinité de solutions, aucune solution ou une unique solution de solution.

Définition 1.3

- Un système est dit   lorsque tous les coefficients du second membre sont nuls :
- On appelle   au système (S) le système obtenu en remplaçant tous les coefficients du second membre $b_1, b_2 \dots b_n$ du système (S) par des 0.

Exemple :

Le système homogène associé au système (S_1) de l'exemple précédent est $(S_1')\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 - 4x_2 & = & 0 \\ -x_1 + 2x_2 & = & 0 \end{array}\right.$

Ce système admet une solution évidente : le couple $(0, 0)$.

Remarque :

Un système homogène admet au moins le p-uplet $(0, 0, \dots, 0)$ comme solution.

Définition 1.4

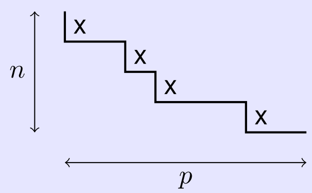
Soit (S) un système avec autant d'inconnues que d'équation. On dit que (S) est un   si (S) admet un unique n-uplet solution.

II. Systèmes échelonnés.

II. 1 Définitions

Définition 2.1

Un système **échelonné** est un système de n équations à p inconnues (avec $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $n \leq p$) qui se schématise de la manière suivante :



x : tête de ligne non nulle

Un système est échelonné si une ligne possède moins d'inconnues que la ligne précédente.

Exemple :

Les systèmes suivants sont échelonnés $(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \\ -2x_2 + x_3 & = & 1. \end{array}\right.$ $(S_2)\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & -1 \\ x_3 & = & 3. \end{array}\right.$

Un système échelonné avec autant d'inconnues que d'équations est appelé système **triangulaire.**

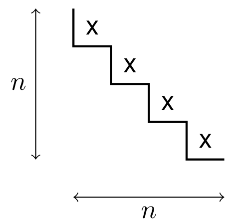
Définition 2.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un système de n équations à n inconnues est dit **triangulaire** lorsqu'il est de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ a_{3,3}x_3 + \ldots + a_{3,n-1}x_{n-1} + a_{3,n}x_n & = & b_3 \\ & \vdots & \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ a_{n,n}x_n & = & b_n. \end{array}\right.$$

Autrement dit un système est triangulaire si il a autant d'équations que d'inconnues et si les coefficients « sous la diagonale » sont nuls.

On peut schématiser un tel système de la manière suivante :



x : tête de ligne non nulle

Exemple :

Le système suivant est triangulaire $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_2 + x_3 & = & -2 \\ 2x_3 & = & 4. \end{array}\right.$

II. 2 Résolution d'un système échelonné

Méthode :

Pour résoudre un système **échelonné** on procède par substitution.

- **Si le système est triangulaire :** On commence la résolution par la dernière ligne pour trouver x_n puis dans la ligne (L_{n-1}), on remplace x_n par sa valeur ce qui permet d'obtenir x_{n-1}, ainsi de suite...
- Si il y a plus d'inconnues que d'équations, on choisit des « **inconnues principales** » et des« **inconnues secondaires** ». On se ramène à un système équivalent dans lequel les inconnues secondaires sont dans le second membre. Le nouveau système est triangulaire $n \times n$ et on se ramène au cas précédent.

Exercice 3

Résoudre les systèmes suivants :

$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_2 + x_3 & = & -2 \\ 2x_3 & = & 4. \end{array}\right.$ $(S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \\ -2x_2 + x_3 & = & 1. \end{array}\right.$ $(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_3 - x_4 & = & 3. \end{array}\right.$

Remarques :

R1 – Un système échelonné avec plus d'équations que d'inconnues admet

R2 – Le choix de l'inconnue secondaire ne change pas l'ensemble des solutions. Si dans le système (S_2) précédent, on choisit x_3 comme inconnue secondaire on obtient alors :

$$(S_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 3 - x_2 - x_3 \\ x_2 & = & \frac{1}{2} + \frac{x_3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_3 \\ x_2 & = & \frac{1}{2} + \frac{x_3}{2} \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions de (S_2) s'écrit alors $\boxed{S = \{(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_3, \frac{1}{2} + \frac{x_3}{2}, x_3) \ /\forall x_3 \in \mathbb{R}\}}$.

Même s'il s'écrit différemment, il s'agit bien du même ensemble de solutions.

R3 – Lors de l'écriture des ensembles de solutions de (S_2) et (S_3), le choix de la lettre n'importe pas :

$\{(2 - 3x_2, x_2, 1 + 2x_2) \ /\forall x_2 \in \mathbb{R}\} =$ ou encore

$\{(-x_2 - 2x_4 - 2; x_2; 3 + x_4; x_4) \ /\forall (x_2, x_4) \in \mathbb{R}^2\} =$.

Théorème 2.3

Si (S) est un système de n équations à n inconnues triangulaire et que ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors il est de Cramer, c'est à dire admet **un unique n-uplet** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **solution**.

III. Résolution d'un système.

On cherche maintenant une méthode pour résoudre un système quelconque, pas forcément échelonné. Pour transformer un système, quelques opérations peuvent être définies .

III. 1 Opérations élémentaires

Définition 3.1

On appelle **opération élémentaire sur les lignes** d'un système (S) toute transformation du système (S) en un système (S') consistant en :

- **L'échange de deux lignes**
  On permute les lignes L_i et L_j, opération codée
- **La multiplication d'une ligne par un réel non nul**
  On remplace la ligne L_i par a fois la ligne L_i avec $a \neq 0$, opération codée
- **L'ajout à une ligne d'un multiple d'une autre ligne**
  On ajoute à la ligne L_i b fois la ligne L_j avec $i \neq j$, opération codée

Remarque :

On admet aussi comme opération élémentaire l'opération obtenue en combinant les deux dernières opérations :
$L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ avec $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $i \neq j$.

Exemple :

On considère le système (S) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 & = & -6. \end{array}\right.$

On effectue successivement sur ce système les opérations élémentaires suivantes : $L_1 \leftrightarrow L_3$, $L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$.

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} 2x_2+3x_3 &=& 0\\ 5x_1-3x_2+x_3 &=& 6\\ 3x_1+3x_2+3x_3 &=& -6. \end{array}\right. \underset{\Leftrightarrow}{L_1\leftrightarrow L_3} \left\{\begin{array}{rcl} 3x_1+3x_2+3x_3 &=& -6.\\ 5x_1-3x_2+x_3 &=& 6\\ 2x_2+3x_3 &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\Leftrightarrow}{L_1\leftrightarrow \frac{1}{3}L_1} \left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3 &=& -2.\\ 5x_1-3x_2+x_3 &=& 6\\ 2x_2+3x_3 &=& 0 \end{array}\right. \underset{\Leftrightarrow}{L_2\leftarrow L_2-5L_1} \left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3 &=& -2.\\ -8x_2-4x_3 &=& 16\\ 2x_2+3x_3 &=& 0 \end{array}\right.$$

Remarque :

Si l'on a effectué une opération élémentaire transformant le système (S) en le système (S'), on peut retrouver le système (S) en effectuant une nouvelle opération élémentaire au système (S') (appelée **opération inverse**).

Proposition 3.2

Toute opération élémentaire transforme un système (S) en un système (S') équivalent.

Théorème 3.3

Grâce à des opérations élémentaires, on peut transformer tout système linéaire (S) $n\times p$ (avec $n\leq p$) en un système équivalent (S') qui est échelonné, auquel s'ajoutent éventuellement des équations du type 0=constante.

III. 2 Méthode du pivot de Gauss.

Ainsi, on peut toujours se ramener **par équivalence** à un système échelonné que l'on sait résoudre. Pour se faire, on utilise la méthode suivante dite du "pivot de Gauss".

On souhaite résoudre le système : $(S_1)\begin{cases} 2x & +3y & +z &=& 0\\ 3x & +y+ & 2z &=& 1\\ 4x & +8y+ & 12z &=& 8\end{cases}$

1. On multiplie éventuellement certaines lignes par un coefficient non nul ($L_i\leftarrow aL_i$) pour simplifier les équations. Ici on fait $L_3\leftarrow \frac{1}{4}L_3$. On a alors

$$(S_1)\begin{cases} 2x & +3y & +z &=& 0\\ 3x & +y+ & 2z &=& 1\\ 4x & +8y+ & 12z &=& 8\end{cases} \underset{\Leftrightarrow}{L_3\leftarrow \frac{1}{4}L_3} \begin{cases} 2x & +3y & +z &=& 0\\ 3x & +y+ & 2z &=& 1\\ x & +2y+ & 3z &=& 2\end{cases}$$

2. On veut que le coefficient de x de la première ligne soit non nul et **le plus simple possible** pour la suite des opérations. On peut échanger des lignes. Ici on fait $L_1\leftrightarrow L_3$:

$$(S)\underset{\Leftrightarrow}{L_1\leftrightarrow L_3}\begin{cases} x & +2y+ & 3z &=& 2\\ 3x & +y+ & 2z &=& 1\\ 2x & +3y & +z &=& 0\end{cases}$$

3. On souhaite faire disparaître les termes en x sur toutes les lignes, sauf la première. On effectue alors des opérations du type $L_i\leftarrow L_i-aL_1$. Ici on fait $\begin{cases} L_2\leftarrow L_2-3L_1\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1\end{cases}$ et on obtient.

$$(S)\underset{\Leftrightarrow}{\begin{array}{c}L_2\leftarrow L_2-3L_1\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1\end{array}}\begin{cases} x & +2y+ & 3z &=& 2\\ & -5y & -7z &=& -5\\ & -y & -5z &=& -4\end{cases}$$

4. On recommence le procédé avec les autres lignes. On veut que le coefficient de y de la deuxième ligne soit non nul et **le plus simple possible** etc.

$$(S)\underset{\Leftrightarrow}{L_2\leftrightarrow L_3}\begin{cases} x & +2y+ & 3z &=& 2\\ & -y & -5z &=& -4\\ & -5y & -7z &=& -5\end{cases} \underset{\Leftrightarrow}{L_3\leftarrow L_3-5L_2}\begin{cases} x & +2y+ & 3z &=& 2\\ & -y & -5z &=& -4\\ & & 18z &=& 15\end{cases}$$

5. On se ramène ainsi à un système échelonné (ici triangulaire) que l'on sait résoudre.

$$\begin{cases} x & +2y+ & 3z & = & 2 \\ & -y & -5z & = & -4 \\ & & 18z & = & 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 2 & -2y & -3z \\ y & = & 4 & -5z & \\ z & = & \dfrac{15}{18} & = \dfrac{5}{6} & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 2-2\left(-\dfrac{1}{6}\right)-3\left(\dfrac{5}{6}\right)=-\dfrac{1}{6} \\ y & = & 4-\dfrac{25}{6}=-\dfrac{1}{6} \\ z & = & \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

L'unique solution du système (S) est le triplet $(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},\frac{5}{6})$.

Remarques :

R1 – Quand on résout un système il faut placer les inconnues en colonnes pour faciliter les calculs.

R2 – A chaque étape on peut soit échanger deux lignes soit pour un i fixé effectuer simultanément les opérations $L_j \leftarrow aL_j + bL_i$ pour $j > i$.

R3 – On indiquera toujours les opérations effectuées.

Exercice 4

Utiliser la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système suivant

- $(S_2)\begin{cases} x_1+x_2 \qquad\qquad -3x_4 & = & -1 \\ -x_1+x_2-3x_3+2x_4 & = & -2 \\ x_1+2x_2 \qquad\qquad -5x_4 & = & -1 \end{cases}$

Remarques :

R1 – Quand un système a beaucoup de coefficients nuls, il est parfois plus rapide de le résoudre par substitution que par la méthode du pivot de Gauss, par exemple : $(S)\begin{cases} x-y=0 \\ y-2z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$

R2 – Si un système a plus d'équations que d'inconnues, on procède de la même façon. Soit le système est incompatible (équations contradictoires) soit en appliquant la méthode on verra apparaître plusieurs fois la même équation.

Exercice 5

Résoudre le système suivant :

$$(S)\begin{cases} x-3y+4z=8 \\ -6x+2y+z=4 \\ 5x+y-z=4 \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

III. 3 Retour sur les systèmes de Cramer

Proposition 3.4

Un système $n\times n$ est de Cramer si et seulement s'il est équivalent à un système triangulaire $n\times n$ **dont les coefficients diagonaux sont non nuls.**

Corollaire 3.5

Un système $n\times n$ est de Cramer si et seulement si son système homogène associé est de Cramer.
Ainsi, la notion de système de Cramer est indépendante du second membre du système : si un système est de Cramer avec un second membre donné alors il l'est avec n'importe quel second membre.

Exercice 6

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère le système

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & a \\ y+z & = & b \\ x+z & = & c. \end{array}\right.$$

1. Quel est le système homogène associé ? Le résoudre.
2. Que peut-on en déduire sur l'ensemble solution du système (S) ?

Remarque :

Si le système est équivalent à un système triangulaire dont l'un (au moins) des coefficients diagonaux est nul, alors ce n'est pas un système de Cramer.