CHAPITRE 7

INVERSION DE MATRICES

I. GÉNÉRALITÉS

Définition/Proposition 1.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On dit que la matrice A est **inversible** lorsqu'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

  Dans ce cas, une telle matrice B est **unique** : on l'appelle **l'inverse de** A et on la note .
- L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_(\mathbb{R})$ est noté

Attention:

On parle de matrices inversibles **uniquement** pour des matrices carrées.

Remarques :

R1 – L'une des deux égalités $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ suffit pour établir l'inversibilité de A.

R2 – La matrice identité I_n d'ordre n est inversible d'inverse ....

R3 – La matrice nulle d'ordre n, 0_n, n'est pas inversible.

Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier que A est inversible, d'inverse B.

Proposition 1.2

Soient A et B deux matrices inversibles de $GL_n(\mathbb{R})$.

- $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ et
- $AB \in GL_n(\mathbb{R})$ et
- ${}^tA \in GL_n(\mathbb{R})$ et
- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(A^p)^{-1} =$

Attention:

On prendra garde à l'ordre du produit pour la matrice inverse de AB.

Remarque :

Soient A, B et C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- $\boxed{\text{Si } AB = 0_n \text{ et } B \text{ est inversible alors } A = 0_n.}$
  En effet, on a alors $ABB^{-1} = 0_n B^{-1}$ donc $AI_n = 0_n$ donc $A = 0_n$.

- $\boxed{\text{Si } AC = BC \text{ et } C \text{ est inversible alors } A = B.}$
  En effet, on a alors $AC - BC = 0_n$ donc $(A-B)C = 0_n$ avec C inversible donc par la propriété précédente, $A - B = 0_n$ donc $A = B$.

Autrement dit, **on peut « simplifier » par une matrice inversible**.

Rappel : Ces propositions sont fausses si on ne fait pas d'hypothèse d'inversibilité.

II. Méthodes

II. 1 Méthode générale

1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Exemple :

On considère le système (S) $\begin{cases} 2x \quad - y + z + 3t = 1 \\ -x + 3y - z \quad = -1 \\ 2x \quad + 3z - t = 0 \end{cases}$

On peut déterminer trois matrices $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$, $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telles que le système (S) soit équivalent à la résolution de l'équation matricielle $AX = B$:

$$A = \qquad\qquad\qquad X = \qquad\qquad B =$$

On a alors

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x - y + z + 3t \\ -x + 3y - z \\ 2x + 3z - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (S)$$

Cas général : On considère le système linéaire de n équations à p inconnues suivant

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

On appelle **matrice associée au système** (S) la matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix}$

On appelle **matrice du second membre** du système la matrice $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par : $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

On appelle **matrice des inconnues** du système la matrice $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ définie par : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$

Retenir

Le système (S) est alors équivalent à l'équation matricielle $AX = B$.
En d'autres termes, le p-uplet réel $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est solution du système (S) si et seulement si le vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est solution de l'équation matricielle $AX = B$.

2. Lien avec l'inversibilité

Théorème 2.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La matrice A est inversible si et seulement si A est la matrice associée à un système de Cramer.
Dans ce cas, on a pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$AX = B \Longleftrightarrow X =$$

Remarque :

On a vu qu'un système de Cramer est équivalent à un système triangulaires avec des coefficients diagonaux non nuls. Cela se traduit en termes matriciels par :

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Méthode :

Comment étudier si une matrice A est inversible.

1. On forme le système qui a pour matrice associée A et second membre $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.
2. On résout ce système à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.
3. Si on obtient un système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, la matrice A est inversible. Sinon la matrice A n'est pas inversible.
4. On trouve A^{-1} en exprimant les solutions X en fonction du second membre B.

Remarque :

Lorsqu'on a déterminé A^{-1}, il est conseillé de vérifier qu'on a bien $AA^{-1} = I_n$.

Remarque :

On a vu que la notion de système de Cramer est indépendante du second membre du système : si un système est de Cramer avec un second membre donné alors il l'est avec n'importe quel second membre. On en déduit que si la question est de montrer seulement l'inversibilité (et pas de calculer l'inverse) on peut prendre un second membre nul :

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est inversible si et seulement si l'équation matricielle
>
> $$AX = 0_{n,1}$$
>
> a une unique solution. Dans ce cas, la solution est $X = 0_{n,1}$.

Exercice 2

Déterminer si la matrice A est inversible et calculer la matrice inverse éventuelle.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

II. 2 Cas particuliers

1. Cas des matrices carrées d'ordre 2.

Théorème 2.2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La matrice A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas

$$A^{-1} = \frac{1}{ab - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Pour étudier l'inversibilité d'une matrice A, la méthode la plus naturelle est de chercher une matrice B telle que $AB = I_n$.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

2. Cas des matrices diagonales.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$, où les a_i sont des réels **non nuls**. Alors A est inversible et

$$A^{-1} =$$

3. Cas d'une relation polynomiale

Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A vérifie la relation $A^3 + 3A^2 - A - 2I_n = 0$.
Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Vérifier que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0_3$. En déduire que A n'est pas inversible.
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ · Montrer que $A^2 - 2A = 0_2$ et en déduire par un raisonnement par l'absurde que A n'est pas inversible.