.

Exercice 1

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui déterminer leur inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
7. $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que A^2 est combinaison linéaire de A et de I. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1}.

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer A^2 et A^3.
   (b) En déduire que A n'est pas inversible.
2. (a) Calculer $(I - A)(I + A + A^2)$.
   (b) En déduire que $(I - A)$ est inversible.
3. Montrer également que $(I + A)$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(A - I_4)^2 = 0$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
2. Montrer que A^2 est inversible et calculer $(A^2)^{-1}$.

Exercice 7

Soient A et P les matrices définies par

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

1. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
2. Déterminer D telle que $A = PDP^{-1}$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$ puis D^n pour tout $n \geqslant 1$.
3. Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1}, puis A^n en fonction de D, P, P^{-1} et n.
4. En déduire une expression de A^n en fonction de n.

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs du réel λ la matrice $A - \lambda I$ n'est-elle pas inversible ?
2. Déterminer en fonction de λ toutes les matrices colonnes X telles que $AX = \lambda X$.
3. Mêmes questions avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.