CHAPITRE 9

Ensembles

I. Généralités

Définition 1.1

- Un **ensemble** est une collection d'objets. Un **élément** de l'ensemble est un des objets qui le constituent.
- Soit E un ensemble.
  Lorsque x est un élément de E, on note $x \in E$ et on dit que
  Lorsque x n'est pas un élément de E, on note $x \notin E$ et on dit que
- On appelle **ensemble vide** et on note $\varnothing$ l'ensemble qui ne contient aucun élément.

Il existe (au moins) deux manières de décrire un ensemble :

- **Par extension :** on écrit entre accolades la liste de ses éléments.
- **Par compréhension :** on écrit entre accolades les éléments d'un ensemble connu vérifiant une propriété caractéristique.

Exemples :

1. Écrire en extension l'ensemble A contenant les 5 premiers entiers naturels.

$$A =$$

2. Ecrire en compréhension l'ensemble B des entiers relatifs plus grands que $-\sqrt{2}$.

$$B =$$

3. Écrire en extension et en compréhension l'ensemble C des entiers naturels pairs.
   En extension, $C =$ et en compréhension $C =$.

Remarque :

L'ordre n'a pas d'importance dans l'écriture d'un ensemble.

Exemple :

$\{1, 2, 3\} =$

Remarque :

Un ensemble contenant un seul élément est appelé un **singleton**.

II. Comparaison d'ensembles

Définition 2.1

On dit que les ensembles A et B **sont égaux** lorsque A et B ont les mêmes éléments. On note .

Définition 2.2

On dit que l'ensemble A **est inclus dans** l'ensemble B lorsque tout élément de A est un élément de B :

On note
Dans ce cas, on dit aussi que A B ou que A est une de B.

Réprésentation de $A \subset B$

Remarque :

> $A \subset B \Longleftrightarrow$.

Exercice 1

Soient $A = \{4, 5, 7\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

- *A et B sont-ils égaux ? Quel ensemble est inclus dans l'autre ?*
- *Donner un ensemble qui contient B.*

Méthode :

Pour montrer une inclusion $A \subset B$, on prend un élément **quelconque** de A et on démontre qu'il appartient à B. Le schéma de la preuve est le suivant :

- Soit $x \in A$.
- **Raisonnement**
- Donc $x \in B$.
- Conclusion : pour tout $x \in A$, $x \in B$ donc $A \subset B$.

Exercice 2

On considère les ensembles $S = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 3\}$ et $T = \{x \in \mathbb{R}, (x-1)(x-3) \geq 0\}$. Montrer que $S \subset T$.

Proposition 2.3

Soient A, B, C des ensembles. Alors :

- $A \subset$
- $\varnothing \subset$
- Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors

Proposition 2.4 — Double inclusion

Soient A et B deux ensembles. On a :

$$A = B \Leftrightarrow$$

Méthode :

Pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux on procède le plus souvent par double inclusion : on montre d'abord que $A \subset B$ puis que $B \subset A$.

Exercice 3

Montrer que $\{x^2/x \in \mathbb{R}\} = \{y \in \mathbb{R}/y \geqslant 0\}$·

III. Opérations sur les ensembles

III. 1 Union

Définition 3.1

Soient A et B deux ensembles.
On appelle **union** de A et B l'ensemble constitué des éléments qui sont dans A ou dans B. On le note

Représentation de $A \cup B$

Proposition 3.2

Soit A et B deux ensembles. Alors

Exemples :

- Si $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$ alors $A \cup B =$.
- Soit E un ensemble. Alors $E \cup E =$ et $E \cup \varnothing =$.

Définition 3.3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A_1, A_2, ..., A_n des ensembles.
On appelle **union** des A_i pour i allant de 1 à n, l'ensemble constitué des éléments qui sont dans au moins l'un des A_i pour $i \in [\![1 ; n]\!]$.

On le note ou

Un élément x appartient à $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ si et seulement si il appartient au moins à un de ces ensembles. Autrement dit :

$$x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Longleftrightarrow$$

Exemple :

Soient $A_1 = \{1,2,3,6\}$, $A_2 = \{2,6,7\}$, $A_3 = \{2,6,8\}$ et $A_4 = \{1,2,6,7,8\}$. Alors $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{4} A_i =$

Remarque :

Soient A, B, C des ensembles. Alors :

- **Associativité :** $(A \cup B) \cup C =$
- **Commutativité** $A \cup B =$

III. 2 Intersection

Définition 3.4

Soient A et B deux ensembles.
On appelle **intersection** de A et B l'ensemble constitué des éléments qui sont dans A et dans B.
On le note

Représentation de $A \cap B$

Proposition 3.5

Soit A et B deux ensembles. Alors $A \cap B \subset$ *et* $A \cap B \subset$

Exemples :

- Si $A = \{0,1,2\}$ et $B = \{1,2,3\}$ alors $A \cap B =$.
- Soit E un ensemble. Alors $E \cap E =$ et $E \cap \varnothing =$.

Définition 3.6

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A_1, A_2, …, A_n n ensembles.
On appelle **intersection** des A_i pour i allant de 1 à n, l'ensemble constitué des éléments qui sont dans tous les A_i pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$.

On le note ou

Un élément x appartient à $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ si et seulement si il appartient à tous les ensembles A_i. Autrement dit :

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Longleftrightarrow$$

Exemple :

Soient $A_1 = \{1,2,3,6\}$, $A_2 = \{2,6,7\}$, $A_3 = \{2,6,8\}$ et $A_4 = \{1,2,6,7,8\}$. Alors $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{3} A_i =$

Remarque :

Soient A, B, C des ensembles. On a :

- **Associativité :** $(A\cap B)\cap C =$
- **Commutativité :** $A \cap B =$

Proposition 3.7

Soient A, B et C des ensembles. Alors

- $A \cup (B \cap C) =$.
- $A \cap (B \cup C) =$
- Si $A \subset B$, alors $A \cup B =$ et $A \cap B =$

Exercice 4

Soient A et B deux ensembles. Simplifier $A \cap (B \cup A)$.

III. 3 Différence

Définition 3.8

Soient A et B deux ensembles.
On appelle A **privé de** B l'ensemble constitué des éléments qui sont dans A et qui ne sont pas dans B.
On le note

Représentation de $A \setminus B$

Exemples :

E1 – $\mathbb{N}^* =$
E2 – Si $A = \{1,2,3,6\}$ et $B = \{2,6,7\}$ alors $A \setminus B =$
E3 – Si E est un ensemble alors $E \setminus E =$

III. 4 Complémentaire

Définition 3.9

Soient E un ensemble et A un sous-ensemble de E.
On appelle **complémentaire** de A dans E l'ensemble $E \setminus A$.
On le note

Représentation de $\overline{A}$

Exemple :

Soient $E = [0,1]$ et $A =]0, 0.2]$, alors le complémentaire de A dans E est $\overline{A} =$.

Proposition 3.10

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. Alors :

- $\overline{\overline{A}} =$
- $A \setminus B =$

Théorème 3.11 — Lois de Morgan

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. Alors :

- $\overline{A \cup B} =$
- $\overline{A \cap B} =$

Autrement dit, **le complémentaire d'un réunion (resp. d'une intersection) est l'intersection (resp. l'union) des complémentaires**.

Remarque :

Les lois de Morgan sont vraies pour une réunion ou une intersection finie d'ensembles : soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un ensemble et $A_1, \ldots, A_n$ des sous-ensembles de E. Alors :

- $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} =$
- $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} =$

III. 5 Produit cartésien

Définition 3.12

Soient E et F deux ensembles.
On appelle **produit cartésien** de E par F l'ensemble constitué des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$.
On le note $E \times F$ (lire E *croix* F), et donc

$$E \times F =$$

Remarques :

R1 – Le produit cartésien d'un ensemble par lui même est noté E^2 au lieu de $E \times E$.

R2 – Dans des énoncés de nombreux résultats, on a souvent écrit « $\forall x, y \in \mathbb{R}$ » qui signifie « pour tous réels x et y ». On peut maintenant utiliser la notation « $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ » qui signifie « pour tout couple de réels ».

Exemple :

Si $E = \{0, 2\}$ et $F = \{0, 1, 2, 3\}$ alors $E \times F =$

Remarques :

R1 – $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples de réels.
On représente habituellement $\mathbb{R}^2$ par un plan muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On associe à chaque couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ le point M du plan de coordonnées (x, y) (ou encore d'abscisse x et d'ordonnée y) et on associe à chaque point M du plan le couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ de ses coordonnées.

R2 – Dans un couple (x, y), **l'ordre est important**. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$, $(1, 2) \neq (2, 1)$.

R3 – Dans un produit cartésien $E \times F$, **deux couples** (x, y) **et** (z, t) **sont égaux** si et seulement si $x = z$ et $y = t$.

Définition 3.13

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, E_2, \ldots, E_n$, n ensembles.
On appelle **produit cartésien** des E_i pour i allant de 1 à n l'ensemble constitué des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, …, $x_n \in E_n$ (c'est-à-dire pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $x_i \in E_i$).

On le note ou , et donc

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n =$$

Remarque :

Le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ termes}}$ de n ensembles égaux à E est également noté E^n.

Exemple :

L'ensemble $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble triplets de réels (ensemble utilisé pour la géométrie dans l'espace).

IV. Parties d'un ensemble

IV. 1 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 4.1

Soit E un ensemble.
On appelle **ensemble des parties** de E l'ensemble constitué des sous-ensembles de E. On le note $\mathcal{P}(E)$.

Autrement dit, $\mathcal{P}(E) =$

Exemple :

Soit $E = \{1, 2\}$. Alors $\mathcal{P}(E) =$

Exercice 5

Soit $F = \{1, 2, 3\}$. *Déterminer* $\mathcal{P}(F)$.

Remarque :

Quelque soit l'ensemble E considéré, on a toujours $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$ et $F \in \mathcal{P}(E)$.

Attention:

$\mathcal{P}(E)$ est un ensemble dont les éléments sont des ensembles !
Dans le premier exemple précédent, $\{1\}$ et $\{1, 3\}$ sont des éléments de $\mathcal{P}(E)$ donc on peut écrire :

$$\{1\} \in \mathcal{P}(E) \text{ et } \{1, 3\} \in \mathcal{P}(E).$$

Mais $\{1\}$ et $\{1, 3\}$ sont également des sous-ensembles de E c'est-à-dire des ensembles inclus dans E donc on peut écrire :

$$\{1\} \subset E \text{ et } \{1, 3\} \subset E.$$

Remarque :

Si E est un ensemble, alors
$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E.$$

IV. 2 Partition d'un ensemble

Définition 4.2

On dit que deux ensembles A et B sont **disjoints** lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Exemple :

$\mathbb{N}$ et $]-5,-1[$ sont disjoints.

Définition 4.3

Soient E un ensemble, $n \in \mathbb{N}^*$ et A_1, A_2, ..., A_n n sous-ensembles de E.
On dit que la famille $(A_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ est une **partition** de E lorsque tous les A_i pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ sont non vides, deux à deux disjoints et d'union égale à E, autrement dit :

-
-
-

Exemple :

Soient $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A = \{1,3,4,9\}$ et $B = \{2,5,8\}$. Pour que la famille (A, B, C) soit une partition de E, il suffit de prendre $C =$.

Proposition 4.4

Soient E un ensemble et A un sous-ensemble de E, non vide et distinct de E.
Alors la famille $(A, \overline{A})$ est une partition de E.

Exemple :

Si l'on considère E l'ensemble des élèves de la classe et A l'ensemble des filles. Alors $\overline{A}$ est l'ensemble des garçons et $(A, \overline{A})$ est une partition de la classe.