CHAPITRE 10

POLYNÔMES

I. FONCTIONS POLYNÔMIALES

Définition 1.1

On appelle **polynôme** (non nul) toute expression de la forme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $a_n \neq 0$. L'ensemble des polynômes se note $\mathbb{R}[X]$.

- Les nombres $a_0, \ldots, a_n$ sont appelés les **coefficients** du polynôme P.
- L'élément X s'appelle l'**indéterminée** du polynôme P.
- L'entier n s'appelle le **degré** de P. On le note $\deg(P)$.
- Le réel a_n s'appelle le **coefficient dominant** du polynôme.

Si $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n se note $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarque :

La notation X est une notation abstraite qui n'a pas le même sens que le x souvent associé aux nombres réels. On identifiera par la suite le polynôme P avec la *fonction polynômiale* définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Exemples :

- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = a \in \mathbb{R}^*$ est un polynôme de degré 0 et de coefficient dominant égal à a (on appelle ce type de polynôme des *polynômes constants*).
- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(x) = 2x^4 - 7x^3 + 3$ est un polynôme de degré 4 et de coefficient dominant égal à 2.
- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $R(x) = 3x^2 - x(3x + 2)$ est un polynôme de degré 1 et de coefficient dominant égal à -2.
- La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $S(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ n'est pas un polynôme.

Exemple :

Soit P le polynôme défini par $P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 3$. Alors :

- P $\quad$ $\mathbb{R}[X]$.
- P $\quad$ $\mathbb{R}_0[X]$.
- P $\quad$ $\mathbb{R}_1[X]$.
- P $\quad$ $\mathbb{R}_2[X]$.
- P $\quad$ $\mathbb{R}_3[X]$.
- P $\quad$ $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 1

Soit P la fonction polynômiale définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 - 4x + 3$. Calculer $P(1)$ et $P(3)$. La fonction P est-elle la fonction nulle ?

Définition 1.2

On appelle **polynôme nul** le polynôme P tel que $P = 0$. Par convention, $\deg(0) = -\infty$.

Théorème 1.3

Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Théorème 1.4

Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont même degré et mêmes coefficients.

Exercice 2

Trouver deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1}$.

II. Propriétés du degré

Proposition 2.1

La somme de deux polynômes P et Q est un polynôme dont le degré est inférieur ou égal au maximum des degrés de P et Q. Autrement dit, $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Attention:

Si P et Q sont deux polynômes, le degré de $P+Q$ n'est pas nécessairement égal au maximum des degrés de P et de Q (l'inégalité peut être stricte).

Exemples :

Soient P, Q et R les polynômes définis par $P(X) = 2X^4 + 7X^2 - 3$, $Q(X) = -2X^4 + X^3 - 1$ et $R(X) = X^6 + 7$.

- $(P+Q)(X) = X^3 + 7X^2 - 4$ donc $\deg(P+Q) = 3$.
- $(P+R)(X) = X^6 + 2X^4 + 7X^2 + 4$ donc $\deg(P+R) = 6$.

Proposition 2.2

Le produit de deux polynômes P et Q est un polynôme dont le degré est égal à la somme des degrés de P et Q. Autrement dit, $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Exemples :

Soient P, Q et R les polynômes définis par $P(X) = 2X^4 + 7X^2 - 3$, $Q(X) = -2X^4 + X^3 - 1$ et $R(X) = X^6 + 7$.

$(PQ)(X) = -4X^8 + 2X^7 - 14X^6 - 4X^4 - 14X^2 + 3$ donc $\deg(PQ) = 8$.

- $(PR)(X) = 2X^{10} + 7X^8 - 3X^6 + 14X^4 + 49X^2 - 21$ donc $\deg(PR) = 10$.

Remarques :

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n s'écrivant $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors
$$P'(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k \times kX^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k \times kX^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_k X^k.$$
Donc $\deg(P') = n - 1$.
- Si P est le polynôme nul, alors P' aussi et ils ont tous les deux un degré égal à $-\infty$.

III. Division euclidienne des polynômes

Théorème 3.1

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple de polynômes (Q, R) avec $\deg(R) < \deg(B)$ tel que
$$A = BQ + R$$
(autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$).
On appelle A le **dividende**, B le **diviseur**, Q le **quotient** et R le **reste**.

Exercice 3

Effectuer dans chacun des cas suivants la division euclidienne de A par B.

- $A(X) = X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$ *et* $B(X) = X^2 - X + 1$.
- $A(X) = X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$ *et* $B(X) = X^2 + 1$.

IV. Racines d'un polynôme

IV. 1 Définition

Définition 4.1

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On appelle **racine** du polynôme P tout réel α tel que $P(\alpha) = 0$.

Exemple :

Le polynôme $P(X) = X^2 - 4X + 3$ vérifie $P(1) = 1^2 - 4 \times 1 + 3 = 0$ et $P(3) = 3^2 - 4 \times 3 + 3 = 0$. Donc 1 et 3 sont des racines de P.

Définition 4.2

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que P est **factorisable** par $X - \alpha$ s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$.

Théorème 4.3

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ possédant une racine α. Alors P est factorisable par $X - \alpha$.

Remarque :

Si $\deg(P) = n \in \mathbb{N}^*$ et si P est factorisable par $X - \alpha$, alors il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$.

Méthode :

Pour trouver le polynôme Q, on peut utiliser l'identification des coefficients ou une division euclidienne.

Exercice 4

Soit P le polynôme défini par $P(X) = X^3 - 3X^2 - 6X + 8$.

1. *Montrer que 1 est racine de P.*
2. *Factoriser P par $X - 1$.*

Remarque :

L'intérêt de la factorisation est de décomposer un polynôme en polynômes plus simples à étudier.

Théorème 4.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Un polynôme de degré n admet au plus n racines.

Exemple :

Le polynôme P défini par $P(X) = X^2 + 1$ n'admet aucune racine.

Corollaire 4.5

Soit $n \in \mathbb{N}$. Un polynôme de de $\mathbb{R}_n[X]$ qui admet plus de $n + 1$ racines distinctes est nécessairement le polynôme nul.

Proposition 4.6

Tout polynôme de degré impair admet au moins une racine.

IV. 2 Trinômes du second degré

Théorème 4.7

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et le polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, P admet deux racines simples $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et se factorise de la manière suivante : $P(X) = a(X - x_1)(X - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$, P admet une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et se factorise de la manière suivante : $P(X) = a(X - x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$, P n'a pas de racine et n'est pas factorisable.

Proposition 4.8

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et le polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, $P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe opposé de a à l'intérieur des racines.
- Si $\Delta = 0$, $P(x)$ est toujours du signe de a et s'annule en $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, $P(x)$ est toujours du signe de a et ne s'annule pas.

Proposition 4.9 — Relations coefficients - racines

Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un trinôme admettant deux racines x_1 et x_2. On a les relations suivantes :

$x_1 + x_2 =$ et $x_1 x_2 =$

Exercice 5

Calculer les racines du polynôme $A(X) = X^4 + X^2 - 6$.

Exercice 6

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ *défini par* $Q(X) = X^3 + 2X^2 - X - 2$.

1. *Trouver une racine évidente de* Q*, que l'on notera* α.
2. *Déterminer le polynôme* R *tel que* $Q(X) = (X - \alpha)R(X)$.
3. *En déduire toutes les racines de* Q *puis résoudre l'inéquation* $Q(x) \geq 0$ *d'inconnue réelle* x.

IV. 3 Factorisation d'un polynôme

Méthode :

Pour factoriser un polynôme P, on regarde le degré de P.

- si $\deg(P) \leq 1$, il n'y a rien à factoriser,
- si $\deg(P) = 2$, on se réfère à l'étude classique d'un trinôme du second degré,
- si $\deg(P) \geq 3$, on trouve une racine α et on factorise P par $X - \alpha$ pour écrire $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$.

On réitère alors ce procédé avec le polynôme Q.

Proposition 4.10

Tout polynôme est factorisable en produit de polynômes de degré 1 ou de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Exercice 7

Factoriser les polynômes $P(X) = X^5 - 2X^4 - X^3 + 2X^2$ et $Q(X) = 2X^4 + 3X^3 - 9X^2 + X + 3$.