Exercice 1

Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

1. $A(x) = x^3 + 2x^2 - 9x + 18$ et $B(x) = x - 2$.
2. $A(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ et $B(x) = x - 1$.
3. $A(x) = 1 + 6x^2 + 4x^3 - 5x^4$ et $B(x) = x^2 - 5x + 3$
4. $A(x) = 3x^5 + 4x^2 + 1$ et $B(x) = x^2 + 2x + 3$.

Exercice 2

Soit P le polynôme défini, pour tout réel x, par $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

1. Montrer que 1 est une racine de P.
2. Déterminer par identification le polynôme Q tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)Q(x)$.
3. Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$ et étudier le signe de P.
4. Etudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + 4$
5. Résoudre l'équation $(\ln(x))^3 - 2(\ln(x))^2 - 5\ln(x) + 6 = 0$.

Exercice 3

Soit P le polynôme défini par $P(x) = -4x^3 - 6x^2 - 4x - 2$.

1. Factoriser P.
2. Donner le domaine de définition de $\sqrt{P}$.
3. Résoudre l'équation $-4e^{2x} - 6e^x - 2e^{-x} - 4 = 0$.

Exercice 4

Soit P et Q deux polynômes de degrés respectifs 3 et 5. Donner le degré de PQ, de $P+Q$, de $P+Q'$. Combien P a-t-il de racines ?

Exercice 5

Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}[X]$

1. $P_1(x) = x^2 - 8$
2. $P_2(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$
3. $P_4(x) = 2x^4 + 5x^2 + 3$.

Exercice 6

Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}$,

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}.$$

Exercice 7

1. Trouver des réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{a}{k(k+1)} + \frac{b}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 8

Déterminer l'ensemble des polynômes de degré 3 tels que $P(1) = 4$, $P(2) = 0$ et $P'(1) = 2$.

Exercice 9

Déterminer un polynôme P de degré 3 tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) - P(x) = x^2$. En déduire une nouvelle méthode pour calculer $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.