CHAPITRE 11

PROBABILITÉS SUR UN UNIVERS FINI

I. EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

Définition 1.1

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance.
- On appelle **univers des possibles** (ou simplement **univers**) l'ensemble des résultats observables ou encore des **issues** possibles d'une expérience aléatoire. On note en général Ω l'univers des possibles et ω un élément de Ω.

Remarque :

Dans ce chapitre on se limitera à l'étude des expériences aléatoires dont le nombre d'issues possibles est fini.

Exemple :

Un jet de dé est une expérience aléatoire. Son univers Ω est constitué des résultats observables, c'est-à-dire les entiers naturels de 1 à 6. On a ainsi $\Omega =$.

Exercice 1

Pour chacune des expériences aléatoires ci-dessous, donner l'univers des possibles et donner le ***cardinal*** *de celui-ci (c'est-à-dire le nombre de ses éléments).*

1. *On lance successivement deux fois un dé dont les faces son numérotées de 1 à 6.*
2. *Une urne contient 3 boules rouges, 2 vertes et 1 bleue. On tire une boule au hasard et on note la couleur de la boule tirée.*

II. EVÉNEMENTS

II. 1 DÉFINITIONS ET EXEMPLES

Définition 2.1

Un **événement aléatoire** est un événement lié à une expérience aléatoire. C'est un sous-ensemble de Ω, composé d'issues de ω. C'est un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exemple :

Pour le lancer d'un dé, en notant A l'évènement « le résultat est pair », on a $A =$. Cet évènement est réalisé si

Exercice 2

Reprenons les expériences aléatoires des exercices précédents.

1. *Pour l'épreuve des deux lancers successifs d'un dé, on note A l'évènement « la somme des résultats vaut 4 ». Donner A.*
2. *Pour l'épreuve du tirage de 4 cartes simultanément, on note B l'évènement : « On tire trois as et le roi de cœur ». Donner B.*

Remarque :

Tout événement est un sous ensemble (ou une partie) de Ω, mais tout sous ensemble de Ω n'est pas nécessairement un événement. Cependant dans le cas d'un univers fini c'est le cas, on peut donc choisir $\mathcal{P}(\Omega)$ comme ensemble des événements.

Définition 2.2

On dit que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un espace

Définition 2.3

- L'événement Ω est appelé
- L'événement $\varnothing$ est appelé
- On appelle un événement qui ne se réalise que pour une seule issue, il est de la forme $\{\omega\}$ (un singleton) où ω est un élément de Ω.

Exemple :

Les évènements élémentaires associés au lancer d'un dé sont

II. 2 Opérations sur les événements

Les événements étant des parties de l'univers Ω, les opérations sur les parties d'un ensemble (union, intersection...) s'appliquent aux événements aléatoires. Dans la suite, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ sera un espace probabilisable.

Définition 2.4

Soient A, B deux évènements.

- L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$ est l'évènement réalisé si et seulement si A ne se réalise pas.
- L'événement « A ou B », noté $A \cup B$ est l'évènement réalisé si et seulement si au moins l'un des deux évènements (ou les deux) se réalise.
- L'événement « A et B », noté $A \cap B$ est l'évènement réalisé si et seulement si les deux évènements se réalisent simultanément.

Autrement dit,

- L'évènement $\overline{A}$ est l'évènement constitué des issues ne réalisant pas l'évènement A.
- L'évènement $A \cup B$ est l'évènement constitué des issues réalisant A ou B (ou les deux).
- L'évènement $A \cap B$ est l'évènement constitué des issues réalisant A et B.

Exercice 3

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. On note A l'événement « On obtient pile au premier lancer » et B l'événement « On obtient pile au second lancer ». Déterminer un ensemble modélisant l'univers des possibles Ω, A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$.

Méthode :

- On repère une intersection à la présence (parfois cachée) des mots suivants : et, chaque, tous...
- On repère une union à la présence (parfois cachée) des mots suivants : ou, au moins, il existe...

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une épreuve consiste à lancer n fois une pièce. Pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, on note P_k l'évènement « on obtient pile au $k^{\text{ième}}$ lancer ». On note A_n l'évènement « On obtient pile à chacun des n lancers » et B_n l'évènement « On obtient au moins un face dans les n lancers ». Donner A_n et B_n en fonction des évènements $P_1, \ldots, P_n$ et/ou de leurs évènements contraires.

Définition 2.5

$A \subset B$ signifie que si A est réalisé, alors B est réalisé.

Exemple :

On jette un dé et on s'intéresse au résultat obtenu sur la face supérieure. Soient A l'évènement « on obtient le chiffre 2 » et B l'évènement « on obtient un nombre pair ». Alors $A \subset B$.

Chaque évènement étant vu comme l'ensemble des issues de Ω qui le réalise, les opérations classiques sur les ensembles et leurs propriétés sont encore vraies dans ce cadre.

Rappel : Soient A, B deux événements, on a :

- $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$
- $(A \cap B) \subset B \subset (A \cup B)$

Ainsi que les **lois de Morgan** :

- $\overline{A \cup B} =$
- $\overline{A \cap B} =$

Remarque :

Tout événement peut s'écrire comme une union finie d'événements élémentaires :

Définition 2.6

Deux événements A et B tels que $A \cap B = \varnothing$ sont dits . Deux évènements incompatibles ne peuvent pas se réaliser simultanément (aucune issue ne réalise les deux évènements).

Remarque :

Dans le langage des ensembles, deux ensembles A et B tels que $A \cap B = \varnothing$ sont dits

Exemple :

On lance un dé. L'événement « on obtient un résultat pair » est incompatible avec « on obtient un résultat impair ».

Définition 2.7

On appelle **système complet d'événements** toute famille finie d'événements $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ telle que :

- $\forall (i,j) \ \in [\![1\,;\,n]\!]^2$ avec $i \neq j$,
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n =$

Remarques :

R1 – Cela signifie que chaque issue de l'expérience aléatoire réalise un et un seul des événements du système complet d'événements.

R2 – Si de plus tous les événements sont non vides, alors ils réalisent une partition de l'ensemble Ω.

Exemples :

E1 – Si A est un événement quelconque d'une expérience aléatoire alors la famille $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements : toute issue réalise soit A, soit $\overline{A}$ mais en aucun cas les deux. **On l'utilise très régulièrement.**

E2 – La famille constituée de l'ensemble des événements élémentaires d'une expérience aléatoire est un système complet d'événements.

Exercice 5

On lance un dé et on s'intéresse au résultat obtenu sur la face supérieure. Soit A l'évènement « on obtient un nombre supérieur ou égal à 5 ». Donner deux évènements (non impossibles) B et C tels que (A, B, C) soit un système complet d'évènements.

III. PROBABILITÉ

Une probabilité est une application permettant de « mesurer » avec quel degré de certitude un évènement va se réaliser.

III. 1 DÉFINITIONS

Définition 3.1

On appelle **probabilité** sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application $\mathrm{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :

- $\mathrm{P}(\Omega) =$
- **Propriété d'additivité** : $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ avec $A \cap B = \varnothing$,

Remarques :

R1 – A l'aide d'une démonstration par récurrence, on montre que si $A_1, \ldots, A_n$ est une famille d'évènements deux à deux incompatibles alors :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) =$$

R2 – La somme des probabilités des évènements élémentaires vaut 1.

Définition 3.2

On dit que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ est un **espace probabilisé fini** (car l'ensemble Ω est fini).

Attention:

Il faut bien discerner les différentes notions : A est un événement, c'est-à-dire une partie de Ω, **c'est un ensemble** et $\mathrm{P}(A)$ est la probabilité de A, **c'est un nombre**.

III. 2 Propriétés générales d'une probabilité

Proposition 3.3

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé fini et A et B deux événements.
On a :

- $\mathrm{P}(\overline{A}) =$
- $\mathrm{P}(A \setminus B) =$

Méthode :

Cette propriété est utile quand on ne sait pas calculer la probabilité de A directement. Par exemple lorsque l'énoncé de l'événement contient « au moins ».

Exercice 6

On lance successivement trois fois un dé équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?

Remarque :

En particulier, $\mathrm{P}(\varnothing) =$

Proposition 3.4 — croissance

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé fini et A et B deux événements.

Si $A \subset B$ alors

Théorème 3.5 — union de deux événements

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé fini et A et B deux événements, on a

$$\mathrm{P}(A \cup B) =$$

Remarque :

Dans le cas où les événements A et B sont incompatibles, on retrouve $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ car $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(\varnothing) = 0$.

Exercice 7

Une classe comporte 10 garçons dont la moitié a les yeux marron et 20 filles dont la moitié a aussi les yeux marron. On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'il soit :

1. un garçon aux yeux marron ?
2. une fille n'ayant pas les yeux marron ?
3. un élève aux yeux marron ou un garçon ?
4. un élève n'ayant pas les yeux marron ou une fille ?

Théorème 3.6 — Formule de Poincaré ou du crible

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé fini et A, B et C trois événements, on a :

Exercice 8

A,B et C sont trois activités de loisir. Les probabilités qu'une personne pratique une ou plusieurs activités sont : $P(A) = 0.21$, $P(B) = 0.41$, $P(C) = 0.33$, $P(A \cap B \cap C) = 0.05$, $\mathrm{P}(A \cap B) = P(B \cap C) = 0.09$ et $\mathrm{P}(A \cap B) = 0.07$. Calculer la probabilité que cette personne :

1. pratique au moins une des activités.
2. aucune des activités.
3. au moins deux activités.

Dans la proposition suivante, on suppose que Ω est de cardinal n et donc de la forme $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.

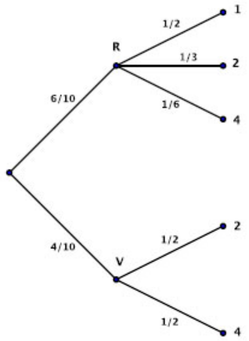
IV. Probabilités conditionnelles.

IV. 1 Arbre pondéré

Exemple :

Expérience Dans un sac, on possède 10 jetons : 6 jetons rouges, numérotés 1,1,1,2,2,4 et quatre jetons verts, numérotés 2,2,4, 4. On tire au hasard un jeton du sac. On note R l'événement "obtenir un jeton rouge", V l'événement "obtenir un jeton vert", $\{1\}$ l'événement "obtenir un jeton numéroté 1" ... .

On représente cette situation par un arbre pondéré.



Par exemple, la branche -R-$\{2\}$ signifie que l'on a obtenu un jeton rouge numéroté 2.

Proposition 4.1

Arbre pondéré

- Loi des nœuds : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de l'événement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

Ainsi la probabilité de $R \cap \{2\}$ est égale à

$$P(R \cap \{2\}) = \frac{6}{10} \times \frac{1}{3} = P(R) \times P_R(\{2\})$$

IV. 2 Définition et exemples

Définition 4.2

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé fini. Soit B un événement tel que $\mathrm{P}(B) \neq 0$.
Pour tout événement A on appelle **probabilité de A sachant B** le nombre $\mathrm{P}_B(A)$ défini par

$$\mathrm{P}_B(A) =$$

Proposition 4.3

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé fini et B un événement tel que $\mathrm{P}(B) \neq 0$.
L'application P_B de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ qui à tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ associe $\mathrm{P}_B(A)$ est une probabilité appelée **probabilité conditionnée** à B.

Remarque :

Comme une probabilité conditionnelle est une probabilité, toutes les propriétés vues pour les probabilités sont encore vraies avec des probabilités conditionnelles.

Donnons quelques exemples. Soient B un événement tel que $\mathrm{P}(B) \neq 0$ et A, C deux événements. On a :

- $\mathrm{P}_B(\overline{A}) =$
- Si $A \subset C$ alors
- $\mathrm{P}_B(A \cup C) =$

Méthode :

Il est souvent plus facile de calculer $P_A(B)$ ou $P_B(A)$ que $P(A \cap B)$, car $P_A(B)$ ou $P_B(A)$ peut parfois s'obtenir juste par lecture d'énoncé. Pour calculer $P(A \cap B)$, on utilise la définition de la probabilité conditionnelle pour obtenir :

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A).$$

Exercice 9

On considère une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules vertes. On effectue deux tirages sans remise, et on introduit les évènements V_1 : "on tire une boule verte au premier tirage", V_2 : " on tire une boule verte au deuxième tirage".

1. Quelle est la probabilité de V_2 sachant que V_1 est réalisé ?
2. Quelle est la probabilité de tirer deux boules vertes ?

Attention:

Il ne faut pas confondre $\mathrm{P}(A \cap B)$ et $\mathrm{P}_B(A)$!

- Pour $\mathrm{P}_B(A)$, on sait que B est réalisé.
- Pour $\mathrm{P}(A \cap B)$, on ne sait rien a priori, aucune hypothèse n'est faite.

Dans le premier cas on étudie la réalisation de $A \cap B$ par rapport à l'univers Ω, tandis que dans le deuxième cas on étudie la réalisation de $A \cap B$ par rapport à B (on restreint l'univers à B).

IV. 3 Formule des probabilités composées

Théorème 4.4 — Formule des probabilités composées

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements avec $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

Remarque :

Cette formule se retrouve facilement avec un arbre. En particulier pour $n = 3$, si A, B et C sont trois événements tels que $\mathrm{P}(A \cap B) \neq 0$, on a :

$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) =$$

Attention:

En toute généralité : $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \neq P(A_1) \times P(A_2) \times \cdots \times P(A_n)$.

Méthode :

Cette formule permet de calculer la probabilité de l'intersection de deux événements grâce aux probabilités conditionnelles qui sont en général faciles à obtenir (souvent, elles s'obtiennent en traduisant l'énoncé mathématiquement)

Exercice 10

Une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires. On tire successivement et sans remise 3 boules dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir la première boule blanche au $3^{\text{ème}}$ tirage ?

Exercice 11

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire successivement et sans remise n boules dans cette urne. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des boules blanches ?

IV. 4 Formule des probabilités totales

Exercice 12

Reprenons le contexte de l'exercice 10. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire au deuxième tirage.

Théorème 4.5 — Formule des probabilités totales

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements. Soit B un évènement.

- On a : $P(B) =$.
- Si de plus pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $P(A_i) \neq 0$ alors :

$$P(B) =$$

Remarque :

On retrouve cette formule facilement sur un arbre :

Corollaire 4.6

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et soient A et B deux événements avec $0 < P(A) < 1$. Alors :

$$P(B) =$$

Méthode :

On utilise **très fréquemment** la formule des probabilités totales. Si on souhaite calculer la probabilité d'un évènement, mais qu'il manque des informations, cette formule permet de faire apparaître les informations manquantes à l'aide d'un S.C.E. C'est d'ailleurs en analysant les informations qu'il manque qu'on détermine le S.C.E à utiliser.

Exercice 13

Une maladie affecte 3% d'une population. Un test détecte cette maladie avec une probabilité de 0.98 chez un malade mais il indique à tort à 4% des personnes saines qu'elles sont malades. On choisit au hasard une personne ayant subi ce test. Soient M l'évènement « être malade » et T l'évènement « le test est positif ».
Quelle est la probabilité que le test soit positif ?

Exercice 14

On dispose de 3 urnes contenant des boules blanches et des boules noires.
La première urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires.
La seconde urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires.
La troisième urne contient 6 boules blanches et 1 boule noire.
On lance un dé parfaitement équilibré.
Si le numéro obtenu est 1 ou 2, on tire une boule dans la première urne.
Si le numéro obtenu est 3, 4 ou 5, on tire une boule dans la deuxième urne.
Si le numéro obtenu est 6, on tire une boule dans la troisième urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

IV. 5 Probabilités des causes : formule de Bayes

Proposition 4.7

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé fini.
Soient A et B deux événements avec $\mathrm{P}(A) \neq 0$ et $\mathrm{P}(B) \neq 0$. Alors

$$\mathrm{P}_B(A) =$$

Remarques :

R1 – Cette formule nous dit que si l'on connait $P_A(B)$ alors on peut calculer $P_B(A)$.

R2 – Si on ne connaît pas $\mathrm{P}(B)$ dans la formule précédente, on utilise la formule des probabilités totales ce qui donne le résultat suivant.

Théorème 4.8 — Formule de Bayes

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé fini.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements. Soit B un événement. On suppose que tous ces événements ont une probabilité non nulle.
On a alors pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$:

$$\mathrm{P}_B(A_i) =$$

Exemple :

Donner cette formule dans le cas où on utilise le S.C.E $(A, \overline{A})$.

Exercice 15

Dans un laboratoire, on fait le constat suivant :

1. Si une souris porte l'anticorps 1 alors elle porte l'anticorps 2 avec la probabilité $\frac{2}{5}$.
2. Si une souris ne porte pas l'anticorps 1 alors elle ne porte pas l'anticorps 2 avec la probabilité $\frac{4}{5}$.
3. La moitié de la population des souris porte l'anticorps 1.

Soient A l'évènement « la souris porte l'anticorps 1 » et B l'évènement « la souris porte l'anticorps 2 »

Sachant qu'une souris porte l'anticorps 2, quelle est la probabilité qu'elle porte l'anticorps 1 ?

V. Indépendance

V. 1 Indépendance de deux événements

Définition 5.1

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé fini et A et B deux événements. On dit que A et B sont **indépendants** (pour la probabilité P) si :

Exemple :

On lance un dé. Les événements A « obtenir un chiffre pair » et B « obtenir un multiple de 3 » sont-ils indépendants ?

Attention:

Il ne faut pas confondre les termes « indépendants » et « incompatibles »

Proposition 5.2

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé fini.

- Soient B un événement de probabilité non nulle et A un événement. Alors A et B sont indépendants si et seulement si
- Soit A un événement de probabilité nulle. Alors A est indépendant de tout autre événement.

Proposition 5.3

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé fini.
Si les événements A et B sont indépendants alors les événements A et $\overline{B}$, les événements $\overline{A}$ et B et les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Méthode :

Certaines situations donnent lieu à des événements indépendants sans que cela soit explicitement donné. Par exemple

- des lancers successifs d'un dé ou d'une pièce.
- deux tirages successifs avec remise.

Attention:

Un tirage **sans remise** est un exemple de non-indépendance. En effet, un tirage donné dépend de tous les tirages précédents.

Exercice 16

On lance un dé équilibré 2 fois.

1. Quelle est la probabilité de n'obtenir aucun 6 ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement un 6 ?

V. 2 Indépendance d'une famille finie d'événements

Définition 5.4

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n événements. On dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** (pour la probabilité P) lorsque :

$$\forall I \subset [\![1\,;\,n]\!],\ \mathrm{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) =$$

Exercice 17

Soit U une urne avec 4 boules numérotées de 1 à 4. On choisit une boule au hasard. On définit les événements : $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$ et $C = \{1,4\}$. Ces événements sont-ils deux à deux indépendants ? mutuellement indépendants ?

Proposition 5.5

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé fini.
Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements mutuellement indépendants, alors les événements A_i ou $\overline{A_i}$ le sont également.