Evènements

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce. Pour chaque $i \in [|1;n|]$, on note P_i l'événement : « on obtient pile au $i$ième tirage ». Exprimer en fonction des $P_i, i \in [|1;n|]$ les événements suivants :

1. A =« On obtient pile au 3ème lancer »
2. B = « On obtient face au 2ème lancer »
3. C = « On obtient pile aux trois premiers lancers et face au 4ème lancer »
4. D =« On obtient pile aux n lancers »
5. E =« On obtient le premier face au 7ème lancer »
6. F =« On obtient au moins un face dans les n lancers »

Exercice 2

Une épreuve aléatoire consister à tirer successivement deux cartes d'un jeu. Soit A l'évènement "la première carte est rouge" et B l'évènement 'la deuxième carte est rouge". Ecrire les évènements suivants à l'aide de A et B.

1. R = "au moins l'une des cartes est rouge.
2. S = "Une seule carte est rouge".
3. T =" les deux cartes sont rouges.

Exercice 3

On lance n fois un dé. Pour tout $k \geqslant 1$, on pose A_k l'évènement "le k-ième lancer fourni un 1". Exprimer les évènements suivants à l'aide des A_k.

1. E_2 : "le premier 1 a été obtenu au deuxième lancer".
2. E_5 : " le premier 1 a été obtenu au cinquième lancer".
3. E_n : " le premier 1 a été obtenu au n-ième lancer".
4. G_4 : " le deuxième 1 a été obtenu au quatrième lancer.

Espace probabilisé

Exercice 4

On considère une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ et Ω son univers des possibles. Soit E et F deux évènements. Montrer que $P(E \cap F) \geqslant P(E) + P(F) - 1$

Exercice 5

On considère une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ et Ω son univers des possibles. On note E, F deux évènements de cette expérience.

1. Montrer que $P(E \cup F) \leqslant P(E) + P(F)$.
2. Soit G un évènement. Montrer que $P(E \cup F \cup G) \leqslant P(E) + P(F) + P(G)$.
3. Écrire cette inégalité pour $\overline{E}$, $\overline{F}$ et $\overline{G}$ et en déduire que si E, F et G sont équiprobables de probabilité p et si $P(E \cap F \cap G) = 0$ alors $p \leqslant \dfrac{2}{3}$.

Probabilités conditionnelles

Exercice 6

On effectue des tirages sans remise dans une urne contenant 5 boules noires et 3 boules blanches. Pour tout $k \in [|1;8|]$, on introduit les évènements E_k "la première boule noire est obtenue au $k$ième tirage", et B_k "le $k$ième tirage donne une boule blanche".

1. Décrire les évènements E_1, E_2, E_3 et E_4 à l'aide des évènements (B_i).
2. En déduire les probabilités des évènements E_1, E_2, E_3 et E_4. Que valent $P(E_k)$ pour $k \geqslant 5$?

Exercice 7

Une entreprise fabrique un même article dans 3 usines A, B et C qui produisent respectivement 50%, 30% et 20% du total de la production. On sait d'autre part que 4% des articles fabriqués par A sont défectueux, 3% des articles fabriqués par B sont défectueux et 2% des articles fabriqués par C sont défectueux. Calculer la probabilité qu'un article produit soit défectueux.

Exercice 8

On extrait, une par une et avec remise, n boules d'une urne contenant une boule blanche et une boule noire. On note B_i l'évènement "on tire une blanche au i-ième tirage", et C l'évènement "au moins l'une des boules tirées est blanche". Exprimer C en fonction des (B_i) puis calculer $P(C)$.

Exercice 9

On choisit au hasard une des 4 urnes ci-dessous et on en tire une boule au hasard.

— L'urne 1 contient 3 boules rouges, 2 blanches et 3 noires.

— L'urne 2 contient 4 boules rouges, 3 blanches et 1 noire.

— L'urne 3 contient 2 boules rouges, 1 blanche et 1 noire.

— L'urne 4 contient 1 boule rouge, 6 blanches et 2 noires.

1. Déterminer la probabilité que cette boule ne soit pas blanche.
2. La boule est blanche, quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'urne 3 ?

Exercice 10

Chaque don de sang est soumis à un test du SIDA. On suppose que ce test a une efficacité de 99% (probabilité que le test soit positif pour une personne atteinte du SIDA), et une probabilité de fausse alarme de 5% (probabilité que le test soit positif pour une personne non atteinte). Enfin, on suppose que la fréquence de séropositivité est $1/10\,000$.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une personne obtenant un test positif soit atteinte du SIDA ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'une personne obtenant un test négatif soit atteinte du SIDA ?

Exercice 11

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,80]$.
Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.
Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.
Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0,12 + 0,004x$.
2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
3. Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.
4. On suppose dans cette question que $x = 50$. Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

Exercice 12

On dispose de 100 pièces de monnaie. Une pièce sur quatre est truquée et une pièce truquée indique pile avec une probabilité de $\frac{4}{5}\cdot$ On choisit au hasard une pièce parmi les 100 et on obtient pile. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une pièce truquée ?

Exercice 13

On considère une particule se déposant à chaque seconde sur l'un des trois sommets A, B, C d'un triangle suivant le procédé suivant :

— Si la particule se trouve en B, elle y reste.

— Si la particule se trouve en A, elle se trouve à la seconde suivante sur l'un des trois sommets de façon équiprobable.

— Si la particule se trouve en C, à la seconde suivante, elle y reste une fois sur trois et a sept fois plus de chance d'aller en B qu'en A.

A la première seconde elle se pose au hasard sur l'un des trois sommets.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement : « à la n-ième seconde, la particule se trouve en A (respectivement B et C) »et on note a_n, b_n, c_n les probabilités de A_n, B_n, C_n.

1. Donner a_1, b_1, c_1.
2. Donner pour $n \in \mathbb{N}^*$, une relation de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = (1/2)^n - (1/6)^n$. En déduire a_n et b_n en fonction de n.
4. Étudier la convergence des suites $(a_n)_{n\geqslant 1}, (b_n)_{n\geqslant 1}, (c_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 14

Le fonctionnement d'un appareil au cours du temps vérifie les règles suivantes : si l'appareil fonctionne à la date n ($n \in \mathbb{N}$), la probabilité qu'il fonctionne à la date $n+1$ est $p = 0,8$ et si l'appareil tombe en panne à la date n ($n \in \mathbb{N}$), la probabilité qu'il soit en panne à la date $n+1$ est $q = 0,4$. On note p_n la probabilité de l'événement M_n : « l'appareil est en état de marche à la date n ». On suppose que l'appareil est en état de marche à l'instant 0.

1. Donner p_0 et p_1.
2. Déterminer une relation de récurrence satisfaite par la suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$ et en déduire l'expression de p_n en fonction de n.
3. Étudier la convergence $(p_n)_{n\geqslant 0}$. Interpréter ce résultat.
4. On note ℓ la limite de cette suite. Déterminer un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $|p_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$.