CHAPITRE 12

LIMITES DE FONCTIONS

I. LIMITES

Dans ce chapitre, on appelle I un intervalle de $\mathbb{R}$. On notera également $\overline{\mathbb{R}}$ la *droite réelle achevée*, c'est-à-dire $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

I. 1 LIMITE FINIE EN UN POINT

Intuitivement, on dit qu'une fonction f tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0 lorsque, plus x est proche de x_0, plus $f(x)$ est proche de ℓ.

Définition 1.1

Soient x_0 un élément de I ou une extrémité de I, et $\ell \in \mathbb{R}$. On considère une fonction f définie sur I.
On dit que f **tend vers** ℓ **lorsque** x **tend vers** x_0 si

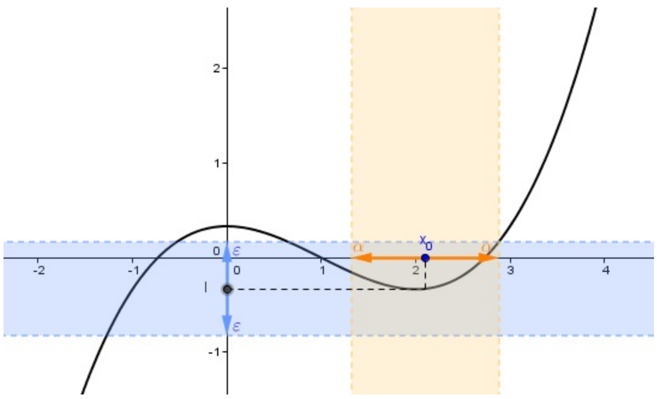
On écrit

Remarques :

R1 – Lorsqu'il existe, un tel réel ℓ est unique.

R2 – Si x_0 est une extrémité de I, la fonction n'est pas nécessairement définie en ce point. Par exemple, si f est la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = 3x + 2$, alors $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$.

Limite finie d'une fonction en un point



Remarque :

Si x_0 est une extrémité de I, la fonction n'est pas nécessairement définie en ce point. Par exemple, si f est la fonction définie pour tout $x \in]1, +\infty[$ par $f(x) = 3x + 2$ alors $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Proposition 1.2

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to a} x^p =$ pour tout $p \in \mathbb{N}$
- si $a \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{x^p} =$ pour tout $p \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{x \to a} |x| =$
- $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{e}^x =$
- si $a > 0$, $\lim\limits_{x \to a} \ln(x) =$
- si $a \geq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} =$

I. 2 Limite infinie en un point

Intuitivement, dire que f tend vers $+\infty$ en x_0 signifie que $f(x)$ est aussi grand que l'on veut (plus grand que n'importe quel nombre A) dès que x est suffisamment proche de x_0.

Définition 1.3

Soient $x_0 \in I$ et f est une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$.

- On dit que $f(x)$ **tend vers** $+\infty$ lorsque x tend vers x_0 si

  On note alors
- On dit que $f(x)$ **tend vers** $-\infty$ lorsque x tend vers x_0 si

  On note alors

Exemple :

> La limite en 0 de la fonction logarithme népérien $\ln : x \mapsto \ln(x)$ est

I. 3 Limite à gauche et limite à droite

Il arrivera, pour certaines fonctions, que l'on doive distinguer une limite lorsque x tend vers a avec $x > a$, et une limite lorsque x tend vers a avec $x < a$.

Définition 1.4

On considère une fonction f définie sur I, et $x_0 \in I$.

- On parle de **limite à gauche** en x_0 lorsqu'on considère la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 avec la contrainte $x < x_0$. On écrit
- On parle de **limite à droite** en x_0 lorsqu'on considère la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 avec la contrainte $x > x_0$. On écrit

Remarque :

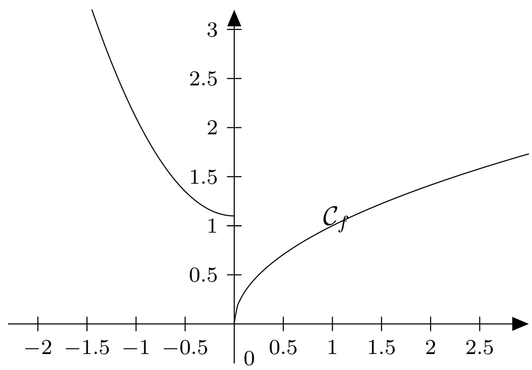
Lorsque la limite à gauche (ou à droite) de f existe, elle est unique.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ de la manière suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1.1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Voici la représentation graphique de cette fonction :



La fonction semble avoir une limite à gauche et à droite en 0, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1.1$ et $\lim\limits_{x\to 0/+} f(x) = 0$

Proposition 1.5 — Limites de référence

Pour tout entier naturel $p \in \mathbb{N}^*$,

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^p} =$
- Si p est impair, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^p} =$ et si p est pair, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^p} =$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) =$

Théorème 1.6

Soit f une fonction **non définie** en x_0 (f définie sur $I \setminus \{x_0\}$).

f admet une limite en x_0 si et seulement si elle admet des limites à gauche et à droite en x_0, **ET** que $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$. Dans ce cas :

Méthode :

Ce Théorème est très utile, notamment pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un réel ou lorsque la fonction est définie différemment à gauche et à droite de x_0.

Exemples :

E1 – La fonction f de l'exemple précédent n'admet pas de limite en 0 car ses limites en 0^+ et 0^- sont différentes.

E2 – La fonction partie entière n' admet pas non plus de limite en 1, en effet

$$\lim_{x\to 1^-} \lfloor x \rfloor = \qquad\qquad \lim_{x\to 1^+} \lfloor x \rfloor =$$

Exercice 1

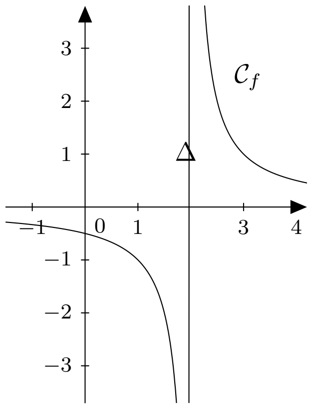
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{si} \quad x>0\\ x^2 & \text{si} \quad x<0\\ a & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

À quelle condition sur a la fonction f admet-elle une limite en 0 ?

Exemple :

Voici la représentation graphique de la fonction f définie pour tout réel x différent de 2 par $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ et la représentation de la droite Δ d'équation $x=2$.



On peut montrer (voir plus loin) que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ et que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ donc la fonction f n'a pas de limite en 2.

Remarque :

Si f est définie sur $[x_0,+\infty[$, la fonction f admet une limite $\ell\in\mathbb{R}$ en x_0 si et seulement si f admet pour limite ℓ en x_0 à droite (on ne peut pas « approcher x_0 par la gauche dans ce cas ») .
De même, si f est définie sur $]-\infty,x_0]$, la fonction f admet une limite $\ell\in\mathbb{R}$ en x_0 si et seulement si f admet pour limite ℓ en x_0 à gauche (on ne peut pas « approcher x_0 par la droite dans ce cas ») .

I. 4 Limite en l'infini

Intuitivement, on dit qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si $f(x)$ est de plus en plus grand lorsque x devient de plus en plus grand (respectivement de plus en plus petit).

Définition 1.7

Soit une fonction f définie sur $I=[a;+\infty[$ où $a\in\mathbb{R}$.

- On dit que f **tend vers** $+\infty$ **lorsque** x **tend vers** $+\infty$ si

  On écrit
- On dit que f **tend vers** $-\infty$ **lorsque** x **tend vers** $+\infty$ si

  On écrit

Remarque :

> On définit de même la limite d'une fonction en $-\infty$: la fonction doit être définie sur un intervalle du type $]-\infty, a]$.

Proposition 1.8 — Limites de référence

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} =$
- Si $p \geq 1$ est un entier pair, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p =$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^p =$
- Si $p \geq 1$ est un entier impair, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p =$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^p =$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x =$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) =$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} |x| =$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} |x| =$

Intuitivement, on dit qu'une fonction f a pour limite un réel ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si $f(x)$ est de plus en plus proche de ℓ lorsque x est de plus en plus grand (respectivement de plus en plus petit).

Définition 1.9

Soit une fonction f définie sur $I = [a; +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$. On dit que f **tend vers le réel** ℓ **lorsque** x **tend vers** $+\infty$ si

On note alors

Remarque :

> Si f est définie sur un intervalle du type $]-\infty; a]$, on définit de même la limite réelle de f en $-\infty$.

Proposition 1.10 — Limites de référence

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} =$
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^p} =$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^p} =$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x =$

I. 5 Asymptotes

Une droite asymptote à la courbe représentative d'une fonction est une droite telle que, quand l'ordonnée ou l'abscisse tend vers l'infini, la distance entre la courbe et la droite tend vers 0.

Définition 1.11

Soient f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Si la fonction f admet une limite finie ℓ en $\pm\infty$ alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = \ell$ pour en $+\infty$ ou $-\infty$.
2. Si la fonction f admet une limite finie infinie en un point a, alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = a$ pour en $x = a$.
3. Si il existe deux réels a et b tel que $\lim\limits_{x\to\pm+\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$, alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour en $x = a$.

Attention:

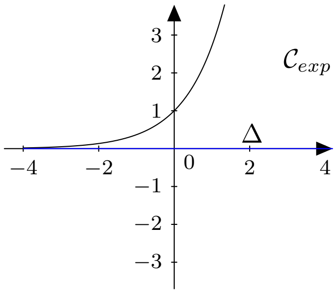
On dit que **la courbe** d'une fonction admet une asymptote et non pas « la fonction admet une asymptote... »

Remarque :

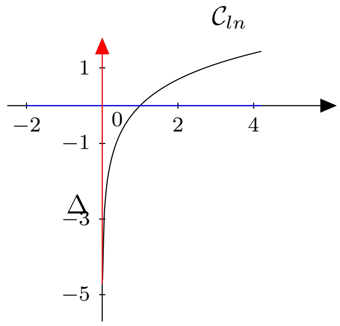
On précisera toujours l'équation de la droite asymptote ($x = a$, $y = \ell$, $y = ax + b$) et, sauf dans la cas d'une asymptote verticale, si elle est asymptote en $+\infty$, $-\infty$ ou les deux.

Exemples :

E1 – On sait que $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, donc la courbe de la fonction exponentielle admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.



E2 – Comme $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, la courbe de la fonction $\ln$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

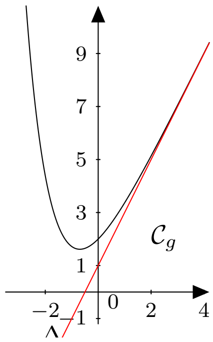


E3 – On a vu dans un exemple précédent, la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ vérifiait $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$. Donc la courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

E4 – On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + 2x + e^{-x}$. On obtient rapidement que

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) - (1 + 2x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

On conclut que la courbe représentative de g admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x + 1$ en $+\infty$:



II. Opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, ℓ_1 et ℓ_2 deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.
Dans tous les tableaux suivants, on pourra remplacer x_0 par x_0^+ ou x_0^-.

Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x))$						

Exercice 2

Déterminer, quand cela est possible, la limite des fonctions suivantes. En déduire les asymptotes éventuelles à $\mathcal{C}_f$.

1. $f(x) = |x| + \ln(x)$ en 1.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x} + e^{-x}$ en $+\infty$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{x} + x^5$ en 0^+ et en 0^-.
4. $f(x) = x^2 + \ln(x)$ en $+\infty$

Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 \in \mathbb{R}^*$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\times g(x))$				

Remarques :

R1 – Si la limite dans le tableau est notée $\pm\infty$, on déterminera facilement s'il s'agit de $+\infty$ ou de $-\infty$ par une étude de signe.

R2 – Le tableau donne en particulier la limite d'une fonction par une constante.

Exercice 3

Étudier les limites des fonctions suivantes en x_0.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$ en 1 et $+\infty$.
2. g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{-7}{x}$ en $x_0 = 0^+$.

Limite de l'inverse d'une fonction

Pour déterminer la limite de l'inverse d'une fonction qui tend vers 0 ou un quotient dont le dénominateur tend vers 0, on a besoin de supposer (comme dans le cas des suites) que le signe de $f(x)$ est constant « autour de x_0 ».

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ et $f(x) > 0$ « autour de x_0 », on notera $\ell = 0^+$.
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ et $f(x) < 0$ « autour de x_0 », on notera $\ell = 0^-$.

On généralise les notations précédentes avec x_0^- et x_0^+.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell = 0^+$	$\ell = 0^-$	$\ell = 0$ avec $\ell \neq 0^+$ et $\ell \neq 0^-$
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$					

Exercice 4

Étudier les limites des fonctions suivantes :

1. f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{1}{x-2}$ en 2^+ puis en 2^-.
2. f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ en 2^+ puis en 2^-.

La limite d'un quotient se déduit des propriétés de limites d'un produit et de l'inverse en utilisant le fait que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$.

Exercice 5

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+5}{1+\dfrac{1}{x}}$ en $+\infty$.
2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x^2-3}{x-1}$ en 1^+ et 1^-.

Comment lever une forme indéterminée ?

Obtenir une forme indéterminée ne signifie pas qu'il n'y a pas de limite, ni que l'on ne peut pas en trouver une. Souvent, mettre en facteur la quantité prépondérante permet de lever une indétermination.

Attention:

Losque x tend vers 0, les relations de prépondérance sont souvent inversées par rapport à ce qui se passe en $\pm\infty$. Par exemple, si x^2 est prépondérant devant x en $+\infty$, x est prépondérant devant x^2 en 0.

Exercice 6

Déterminer si les limites suivantes existent et le cas échéant, déterminer leur valeur (on distinguera limite à gauche et limite à droite lorsque c'est pertinent).

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2 - 5x + 4$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 6x + 5}$
3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 6x + 5}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + x^2}{3x + x^3}$

Théorème 2.1 — Croissances comparées

Soient α et β deux réels strictement positifs et $n \in \mathbb{N}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{\mathrm{e}^{\beta x}} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\ln^\beta(x)} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^\alpha(x)}{\mathrm{e}^{\beta x}} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{\ln^\beta(x)} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0$

Exercice 7

Déterminer si les limites suivantes existent et le cas échéant, déterminer leur valeur (on distinguera limite à gauche et limite à droite lorsque c'est pertinent).

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\ln x)^2}{e^x}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{e^x}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{e^x - 1}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x + \ln x}{3 \ln x}$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x + \ln x}{3 \ln x}$

Proposition 2.2 — Taux d'accroissement

Limites usuelles à connaître

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} =$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x - 1} =$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} =$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} =$

La démonstration de ces limites sera faite dans le chapitre sur la dérivation.

III. Composition

III. 1 Composition avec une suite

Théorème 3.1 — Composée d'une fonction et d'une suite

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, x_0 un élément de I ou une extrémité (finie ou infinie).
Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de I (c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$).
On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ (ℓ peut être infini).
Alors $(f(u_n))_{n \geq 0}$ admet une limite et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) =$

Exercice 8

Étudier la convergence des suites $(u_n) = \left(\sqrt{2 + \frac{3}{n^2}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n) = \left(1 - e^{-\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

III. 2 Composition de deux fonctions

Théorème 3.2 — Composée de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions et x_0, y_0 et ℓ trois éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. Si :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \text{ et } \lim_{y \to y_0} g(y) = \ell$$

Alors :

$$\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) =$$

Exercice 9

Étudier les limites suivantes

1. $e^{\frac{1}{x}}$ quand x tend vers $+\infty$.
2. $\ln(2-x)$ quand x tend vers 2.

IV. Limites et inégalités

IV. 1 Compatibilité du passage à la limite et inégalités

Théorème 4.1

Soient I un intervalle et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I.
Soient f et g deux fonctions définies sur I ou $I \setminus \{x_0\}$ et admettant une limite (potentiellement infinie).

Si pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors

Autrement dit, **les inégalités larges sont conservées par passage à la limite**.

Attention:

Pour utiliser ce théorème, il faut savoir que f et g admettent une limite en x_0. De plus, les inégalités strictes ne sont pas conservées par passage à la limite. Il suffit de penser à la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ pour un contre-exemple.

Exemple :

Soit f une fonction positive définie sur un intervalle I et admettant une limite en x_0 (x_0 étant un élément ou une extrémité de I). Nécessairement la limite est positive (ou $+\infty$).

IV. 2 Existence d'une limite par encadrement

Théorème 4.2 — de la limite par encadrement - ou théorème des gendarmes

Soient I un intervalle et $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou que x_0 est une extrémité de I. Soient f, φ et ψ trois fonctions définies sur I (ou $I \setminus \{x_0\}$).

On suppose que φ et ψ admettent une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0.
Si pour tout $x \in I$ (ou $x \in I \setminus \{x_0\}$), $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ alors la limite de f lorsque x tend vers x_0 existe et vaut

Autrement dit, **si une fonction est encadrée par deux fonctions tendant vers la même limite en x_0 alors elle tend aussi vers cette limite en x_0**.

Exercice 10

Montrer que pour tout $x \in]4, +\infty[$, $\ln x \leqslant \sqrt{x}$. Retrouver alors la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

IV. 3 Existence d'une limite par minoration/majoration

Théorème 4.3 — de la limite par comparaison

Soient I un intervalle et $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que $x_0 \in I$ ou que x_0 est une extrémité de I.

Soient f, g deux fonctions définies sur I (ou $I \setminus \{x_0\}$) telles que pour tout $x \in I$ (ou $x \in I \setminus \{x_0\}$), $g(x) \leqslant f(x)$. Alors :

1. Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) =$
2. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$

Autrement dit, si une fonction « est plus grande » qu'une fonction tendant vers $+\infty$ en x_0 alors elle tend aussi vers $+\infty$ en x_0.

Exemple :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \geq x - 1$. Or, on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$. Par minoration, on a alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$.

V. Limites et monotonie

Théorème 5.1 — Théorème de la limite monotone

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et f est une fonction monotone sur $]a, b[$. Alors :

1. f admet en tout point de l'intervalle $]a, b[$ une limite finie à gauche et une limite finie à droite.
2. f possède une limite (finie ou infinie) en a et en b.

Détails du théorème de la limite monotone.

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$, où a et b peuvent être infinis.

- Si f est croissante et majorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie en b^-.
- Si f est croissante et non majorée sur $]a; b[$, alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.

- Si f est croissante et minorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie en a^+.
- Si f est croissante et non minorée sur $]a; b[$, alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

- Si f est décroissante et majorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie en a^+.
- Si f est décroissante et non majorée sur $]a; b[$, alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

- Si f est décroissante et minorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie en b^-.
- Si f est décroissante et non minorée sur $]a; b[$, alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.