Exercice 1

Déterminer les limites suivantes en distinguant à gauche et à droite si nécessaire. On précisera les asymptotes éventuelles.

1. $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^2+4}$ en $+\infty$ et $-\infty$.
2. $\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$ en 1 et $+\infty$.
3. $\dfrac{\sqrt{x}+\ln x}{x}$ en 0 et $+\infty$.
4. $\dfrac{\ln x+e^x+x^2}{\sqrt{x}+2}$ en 0 et $+\infty$.
5. $\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}$ en -1 et en $+\infty$.
6. $x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ en 0.
7. $e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$ en 1.
8. $e^{-\frac{1}{x}}$ en 0.
9. $\dfrac{1+x+x^3}{2^x}$ en 0.
10. $\big(\ln(x^2+1)-2\ln(x)\big)$ en 0 et en $+\infty$.
11. $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ en 1.
12. $x^4e^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty$.

Exercice 2

Étudier les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définition :

1. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.
2. $g(x)=\ln|x^2-3|$.
3. $h(x)=\ln\left|\dfrac{x-1}{2x}\right|$.
4. $i(x)=e^{\frac{x}{2x+1}}$
5. $j(x)=x^{1/x}$.
6. $k(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3x^2+1}-2}$.
7. $m(x)=x+\sqrt{x^2-3x+2}$.
8. $n(x)=e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}$.

Exercice 3

1. Soient f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ et $x_0=0$.
   (a) Donner l'ensemble de définition de f puis tracer sa représentation graphique.
   (b) Déterminer graphiquement si f admet une limite à gauche en x_0, une limite à droite en x_0.
   (c) f admet-elle une limite en x_0 ?
2. Même question avec la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{1}{x^4}$ et $x_0=0$.
3. Même question avec la fonction h définie par $h(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} & \text{si } x\geqslant -1\\ 0 & \text{si } x<-1.\end{cases}$ et $x_0=-1$.

Exercice 4

1. Montrer que pour tout $x\in[1,+\infty[$, $e^x\geqslant x^2$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\cdot$ (On retrouve une partie du Théorème des croissances comparées).

Exercice 5

Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $1+x\leqslant e^x\leqslant 1+xe^x$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}\cdot$

Exercice 6

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{2-(x-\lfloor x\rfloor)}\leqslant 1$.
2. En déduire la limite de $x\mapsto\dfrac{x}{2-(x-\lfloor x\rfloor)}$ en $+\infty$.

Exercice 7

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\lfloor x\rfloor+1}{\sqrt{x}}\cdot$

Exercice 8

Étudier les fonctions suivantes (étude de variations et limites éventuelles)

$$f : x\mapsto x^x \qquad g : x\to(x+1)^2e^{-x}$$

Exercice 9

Soit f la fonction définie pour tout $x>-1$ par $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}\cdot$

1. Effectuer la division euclidienne de x^2-x+1 par $x+1$. En déduire trois réels a,b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$ pour tout $x>-1$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(ax+b)$. Qu'en déduit-on graphiquement ?

Exercice 10

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ admettant une limite en tout point et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite convergente telle que pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Quelle équation la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ va t-elle vérifier ?
2. **Application :** soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$ par $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. Étudier la monotonie de cette suite puis montrer par l'absurde que cette suite diverge vers $+\infty$.