CHAPITRE 13

APPLICATIONS

I. APPLICATIONS

I. 1 DÉFINITIONS ET EXEMPLES

Définition 1.1

Soient A et B deux ensembles.

- Une **application** f de A dans B est un procédé qui à chaque élément x de A associe **un unique** élément de B noté $f(x)$.
- On note et on dit qu'à x on associe $f(x)$.
- On dit que A est de f et que B est de f. On dit aussi que f .
- L'ensemble des applications de A dans B est noté$\mathcal{A}(E, F)$.

Quelle est la différence entre fonction et application ?

Soit A et B deux ensembles. Une **fonction** f de A dans B est un procédé qui à chaque élément de A associe **au plus** un élément B.

On remarque que la différence entre les deux définitions vient du fait qu'une application associe à tout élément x de A **un unique** élément de B alors qu'une fonction en associe **au plus** un. Autrement dit une fonction peut n'envoyer un élément x de A sur aucun élément de B. Considérons par exemple :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Ceci est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Comme on le voit 0 n'est envoyé sur aucun élément de $\mathbb{R}$. Il ne peut donc pas s'agir d'une application.

On peut voir une application comme une fonction qui a pour ensemble de départ son ensemble de définition. On sait que la fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$, ainsi

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

est une application.

Exemple :

Voici deux exemples d'applications :

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$
- $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^2 \end{array}$

Remarque :

Une suite réelle $u = (u_n)_{n \geq 0}$ peut être vue comme une application dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$ et l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$. On note alors :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array} \right.$$

Exercice 1

Donner l'écriture « en application » des fonctions usuelles suivantes (en donnant le plus petit ensemble possible pour l'ensemble d'arrivée et l'ensemble de définition pour l'ensemble de départ) : la fonction carré, la fonction racine carrée, la fonction logarithme népérien, la fonction exponentielle, la fonction valeur absolue et la fonction partie entière.

Définition 1.2

Deux applications f et g sont **égales** si et seulement si elles ont le même ensemble de départ A, le même ensemble d'arrivée B et si pour tout x de A, on a $f(x) = g(x)$.

Retenir

Deux applications peuvent être définies par la même formule mais être différentes. C'est le cas par exemple si on ne choisit pas le même ensemble de départ ou d'arrivée.

Exemple :

Les applications $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ ont la même expression mais ne sont pas les mêmes applications

Exercice 2

Soient f et g les applications définies par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+e^x) \end{array} \quad \textit{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \ln(1+e^{-x}) \end{array}$$

Montrer que $f = g$.

Dans la suite, A et B seront deux ensembles.

Définition 1.3

Soit $f : A \to B$ une application. Soient $a \in A$ et $b \in B$ et E une partie de A.

1. Lorsque $b = f(a)$, on dit que b est **l'image** de a par f et que a est **un antécédent** de b par f.
2. On appelle   et on note   le sous-ensemble de B constitué des images par f des éléments de E :

Attention:

Soit $f : A \to B$ une application.

- Par définition d'une application, tout élément a de A admet une et une unique image par f qui est $f(a)$.
- Un élément b de B peut ne pas avoir d'antécédent, en avoir un ou en avoir plusieurs.

Remarque :

Pour déterminer l'image d'un élément, on procède généralement par « simple » calcul. alors que pour déterminer le ou les antécédents d'un élément, on est amené (souvent) à résoudre une équation.

Exercice 3

Soit $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$

Déterminer (si cela existe) le ou les antécédents de $(3,-1)$ *par* f.

Notation : Soit A un ensemble. On note Id_A l'application identité définie par $Id_A : \left| \begin{array}{ccc} A & \to & A \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$.

Exemple :

D'après la définition de l'application identité dépend de l'ensemble A. Ainsi

$$\begin{array}{ccccc} Id_{\mathbb{R}} & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & & M & \mapsto & M \end{array}$$

I. 2 Composition

Dans la suite, A, B et C sont trois ensembles.

Définition 1.4

Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications. On appelle **application composée** de f par g et on note $g \circ f$ l'application

$$\begin{array}{cccc} g \circ f & : & & \longrightarrow & \\ & & x & \longmapsto & \end{array}$$

Schéma :

Remarque :

L'application est bien définie car l'ensemble d'arrivée de f est égal à l'ensemble de départ de g.

Attention:

Pour deux applications f et g données, les applications composées $g \circ f$ et $f \circ g$ n'existent pas toujours et lorsqu'elles existent, on a en général $g \circ f \neq f \circ g$.

Exercice 4

Soient f et g les applications définies par : $f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & x^{1/3} \end{array}$ *et* $g : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$ *Les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ existent-elles ? Si oui, donner leurs expressions.*

Exercice 5

Soit f une application de A dans B. Que vaut $f \circ Id_A$? et $Id_B \circ f$?

Attention:

Si $A \neq B$, $Id_A \circ f$ et $f \circ Id_B$ n'existent pas.

II. Injectivité, surjectivité, bijectivité

Dans toute la suite, A et B désignent des ensembles et $f : A \to B$ une application.

Rappel :
Soit $y \in B$. Trouver un éventuel antécédent de y par f revient à chercher les solutions de l'équation $y = f(x)$, $x \in A$.

Définition 2.1

Une application $f : A \to B$ est dite

- **surjective** si tout élément de B a un antécédent : On a alors $f(A) =$.
- **injective** si tout élément de B a un antécédent :
- **bijective** si f est injective et surjective, autrement dit si tout élément de B a **exactement** un antécédent :

Méthode :

Pour étudier le caractère surjectif, injectif ou bijectif d'une application $f : A \to B$, il suffit de résoudre pour $y \in B$, l'équation $y = f(x)$.

- Si $y = f(x)$ admet **toujours au moins une solution** x **dans** A, alors f est surjective.
- Si $y = f(x)$ admet **toujours au maximum une solution** x **dans** A, alors f est injective.
- Si $y = f(x)$ admet **toujours une unique solution** x **dans** A, alors f est bijective.

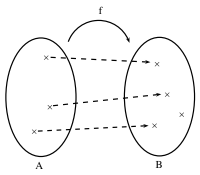
Remarques :

R1 – Pour montrer qu'une application n'est pas surjective, il suffit de trouver qu'un élément de l'ensemble d'arrivée n'admet pas d'antécédent.

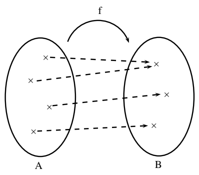
R2 – Pour montrer qu'une application n'est pas injective, il suffit de trouver qu'un élément de l'ensemble d'arrivée admet plusieurs (au moins deux) antécédents.

R3 – Une application peut n'être ni injective, ni surjective.

Exemple :



Cette fonction est injective, non surjective.



Cette fonction est surjective, non injective.

Exercice 6

Les applications suivantes sont-elles surjectives ? injectives ? bijectives ?

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Exercice 7

Les applications suivantes sont-elles surjectives ? injectives ? bijectives ?

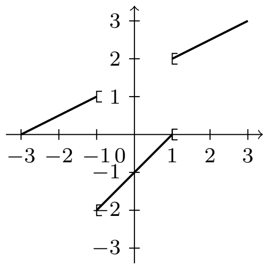
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array} \qquad u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & n^2+1 \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3(x-1)(x+5) \end{array}$$

Théorème 2.2

Si une fonction f est strictement monotone, alors f est injective.

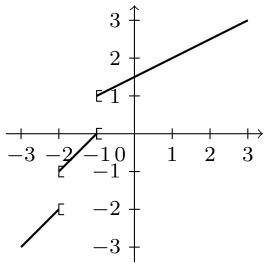
Remarques :

R1 – La réciproque est fausse en générale. On peut penser à la fonction



Cette fonction est bien injective mais n'est pas strictement monotone

R2 – La stricte monotonie ne donne pas la bijectivité en général. On peut prendre par exemple :



Cette fonction est bien injective car tout élément de $[-3; 3]$ admet au maximum un antécédent, mais on observe que certains éléments, comme par exemple 0,5 ou -1,5, n'admettent pas d'antécédent. Elle n'est pas surjective et donc pas bijective.

Pour qu'une application strictement monotone soit bijective, il faut rajouter une hypothèse de continuité. Cela fera l'objet d'un théorème dans un prochain chapitre.

Exercice 8

Montrer que la fonction $f : x \mapsto (e^x)^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans un ensemble J à déterminer.

Exercice 9

Les fonctions affines sont-elles bijectives ?

III. APPLICATION RÉCIPROQUE D'UNE BIJECTION

Définition 3.1

Soit f une bijection de A dans B.
On appelle **application réciproque de** f et on note f^{-1} l'application de B dans A qui à tout élément $y \in B$ associe son unique antécédent $x \in A$ par f.

Schéma :

Méthode :

Pour déterminer l'application réciproque f^{-1} d'une bijection f de A dans B :

- On pose $y \in B$.
- On résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in A$.
- On obtient x en fonction de y.
- L'expression trouvée est égale à $f^{-1}(y)$.

Remarque :

La démonstration de la bijectivité d'une application et la détermination de son application réciproque peuvent donc se faire en une seule étape : pour y dans B, on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in A$. Si cette équation admet une unique solution pour chaque y de B alors f est une bijection de A dans B et $f^{-1}(y) = x$.

Exercice 10

1. Déterminer la bijection réciproque de l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + 1$.
2. Donner la bijection réciproque de l'application exponentielle (avec les bons ensembles de départ et d'arrivée, la rendant bijective).
3. Déterminer la bijection réciproque de l'application $f : \mathbb{R} \to]1; +\infty[$ définie par $f(x) = (e^x)^2 + 1$.
4. Déterminer la bijection réciproque de l'application $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

III. 1 QUELQUES PROPRIÉTÉS

Proposition 3.2

Soit $f : A \to B$ une bijection. Alors $f^{-1} : B \to A$ est aussi une bijection et $(f^{-1})^{-1} =$

Proposition 3.3

Soit f une bijection de A dans B.

1. $\forall (x, y) \in A \times B,\quad f(x) = y \Leftrightarrow x =$
2. $\forall x \in A,\quad f^{-1}(f(x)) =$
3. $\forall y \in B,\quad f(f^{-1}(y)) =$
4. $f^{-1} \circ f =$ et $f \circ f^{-1} =$

Attention:

On prendra garde à ne pas confondre les différents ensembles dans les points 2 et 3 de la proposition précédente.

Théorème 3.4

Soit $f : A \to B$ une application.
f est bijective si et seulement s'il existe une application $g : B \to A$ telle que $g \circ f = Id_A$ et $f \circ g = Id_B$.
Dans ce cas, $g = f^{-1}$.

Proposition 3.5

Soient A, B et C trois ensembles.
Si les applications $g : B \to C$ et $f : A \to B$ sont bijectives alors $g \circ f$ est une bijection de A dans C et on a $(g \circ f)^{-1} =$.

Représentation graphique : (dans le cas où $f : A \to B$ avec A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$)
On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Lorsque f^{-1} existe, sa courbe représentative s'obtient par symétrie de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice (c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$).
En effet, cette symétrie transforme un point de coordonnées (x, y) en celui de coordonnées (y, x).

Exemple avec les fonctions exponentielles et logarithme népérien