.

❋ Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1+e^x)$ et $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, l'application définie par $g(x) = -x$.

1. L'application $f \circ g$ existe t-elle ? Si oui, donner son expression.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f \circ g(x) = x$.

❋ Exercice 2

Les applications suivantes sont-elles surjectives ? injectives ? bijectives ? Lorsqu'elle existe, on déterminera son application réciproque.

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\backslash\{2\} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+3}{x-3} \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc}]-\infty;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1-x) \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & [-1;+\infty[\\ x & \mapsto & 5x^2-1 \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, 2x-y) \end{array}$

❋ Exercice 3

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow &]e^2, +\infty[\\ x & \mapsto & e^{2+1/x} \end{array}$

Montrer que f est bijective et donner son application réciproque.

❋ Exercice 4

On définit l'application $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par $\phi(x,y,z) = (2x-y-z; x-y-z; 3x-2y)$. Cette application est-elle surjective, injective, bijective ?

❋ Exercice 5

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$. Montrer que f est bijective de $]a, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ et déterminer f^{-1}.

❋ Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et déterminer sa bijection réciproque (*on pourra poser* $X = e^x$).

❋ Exercice 7

Soit E un ensemble et $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \mapsto & \overline{A} \end{array}$.

Montrer que f est bijective et donner f^{-1}.

❋ Exercice 8

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et f l'application suivante : $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$.

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f. Donner f^{-1} le cas échéant.

❋ Exercice 9

Soit f l'application de $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ dans lui même définie par $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$. Déterminer $f \circ f$ et en déduire que f est une bijection.