CHAPITRE 14

COEFFICIENTS BINOMIAUX

I. DÉFINITIONS

I. 1 FACTORIELLES

Définition 1.1

Pour entier naturel n, on appelle **factorielle de** n, et on note $n!$, l'entier naturel défini par

- $0! =$
- Si $n \geq 1$, $\quad n! =$

Remarque :

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! =$

Théorème 1.2

Il y a $n!$ bijections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à n éléments.

Démonstration. □

I. 2 ENSEMBLES ET COEFFICIENTS BINOMIAUX.

Définition 1.3

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0\,;\,n]\!]$.

Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est noté (lire).

Les nombres $\binom{n}{p}$ sont appelés

Exemple :

Soit $E = \{a, b, c\}$, rappelons que $\mathcal{P}(E) =$
Donc

$$\binom{3}{0} = \quad , \binom{3}{1} = \quad , \binom{3}{2} = \quad , \binom{3}{3} =$$

Remarques :

R1 – Par convention, si $p > n$, on pose $\binom{n}{p} =$. Cela est cohérent avec le fait qu'il n'existe pas dans ce cas de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments.

R2 – Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, le nombre $\binom{n}{p}$ **est un entier naturel.**

Exemple :

Le nombre $\binom{4}{2}$ est le nombre de parties à 2 éléments dans un ensemble à 4 éléments. Soit $E = \{a;\ b;\ c;\ d\}$ un ensemble à quatre éléments. Alors les parties à deux éléments sont :

Donc $\binom{4}{2} =\quad$.

Théorème 1.4

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant n$.

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} =$
- $\binom{n}{1} =$
- $\binom{n}{p} =$ $\qquad$ $(Symétrie)$.

En effet, considérons un ensemble à n éléments $E = (a_1;\ a_2;\ ...;\ a_n)$. Le seul ensemble à 0 élément dans E est $\varnothing$, donc $\binom{n}{0} = 1$. De la même façon la seule partie de E à n élément est E lui-même, donc $\binom{n}{n} = 1$.
Les parties à 1 élément de E sont les singletons : $\{a_1\}; \{a_2\}; ...;\ \{a_n\}$. Donc $\binom{n}{1} = n$.

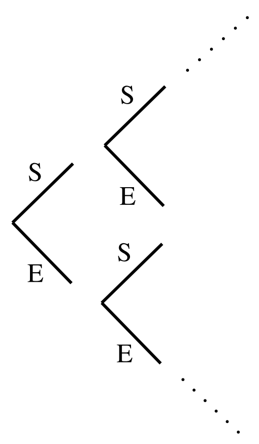
Remarque :

Cette définition des coefficients binomiaux peut s'interpréter par le fait quee $\binom{n}{p}$ est aussi égal au nombre de façon de choisir p objets distincts parmi n objets donnés (toujours avec $p \leq n$).

I. 3 Lien avec les arbres binaires :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On répète n fois une expérience à deux issues :Succès - Echec. Cela peut se représenter par l'arbre binaire suivant :

Exemple d'arbre binaire (succès-échec)



On compte le nombre de chemins dans l'arbre qui réalisent p succès parmi les n épreuves répétées.

Proposition 1.5

Dans un arbre binaire (succès-échec), le nombre de chemins réalisant p succès pour n répétitions est

Remarque :

- Il n'existe qu'un seul chemin avec 0 succès (il faut pour cela n'avoir que des échecs). On retrouve $\binom{n}{0} = 1$.
- Il n'existe qu'un seul chemin avec n succès (il faut pour cela n'avoir que des succès). On retrouve $\binom{n}{n} = 1$.
- Il existe n chemin avec 1 succès (il faut pour cela que parmi les n tentatives, une seule soit fructueuse. Cela peut être la première, la deuxième,..., la n-ième). On retrouve $\binom{n}{1} = n$.
- La formule de symétrie s'explique ici par le fait que le nombre de façons d'avoir p succès parmi n tentatives est égale au nombre de façons d'avoir $n-p$ échecs parmi n tentatives.

Exemple :

$\binom{10}{9} = \binom{10}{1} =$

II. Propriétés des coefficients binomiaux.

Théorème 2.1 — Formule du triangle de Pascal

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant p \leqslant n$. On a :

$$\binom{n}{p} =$$

Démonstration. □

Cette formule permet un calcul rapide des coefficients binomiaux. Connaitre les coefficients binomiaux au rang $n-1$ permet de calculer les coefficients binomiaux au rang n.

On construit le triangle de la manière suivante : on connait tous les nombres de la forme $\binom{n}{0}$ et $\binom{n}{n}$ qui valent tous 1. Les autres termes se construisent à l'aide de la formule de Pascal.

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

Théorème 2.2

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant n$. On a :

$$\binom{n}{p} =$$

Démonstration. □

Exemple :

En appliquant cette formule, on trouve $\binom{5}{2} =$.

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, exprimer $\binom{n}{2}$ en fonction de n.

Remarque :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{0;\ 1;\ \ldots;\ n\}$. Alors

$$\binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}{p!}$$

Proposition 2.3

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $1 \leqslant p \leqslant n$, alors

$$p \times \binom{n}{p} =$$

Démonstration. □

Remarque :

On montre également que pour tout $p \geq 2$, $p(p-1)\binom{n}{p} =$

III. Formule du binôme de Newton

Théorème 3.1 — Formule du binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(a+b)^n =$$

Exemple :

Vérifions le résultat pour $n = 2$.

- D'une part, on sait que $(a+b)^2 =$
- D'autre part : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^k b^{2-k} =$.

Remarque :

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a+b) = (b+a)$ donc $(a+b)^n = (b+a)^n$ pour tout $n \geq 0$. Dans la formule du binôme, les « rôles » de a et b sont donc interchangeables :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} = (b+a)^n$$

Méthode :

La formule du binôme permet de développer facilement les puissances d'une somme de deux réels. Pour cela, on écrit le triangle de Pascal jusqu'au rang n afin de déterminer les coefficients qui vont intervenir dans la somme.

Exercice 2

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Donner les formules développées liées à $(a+b)^3$ et $(a+b)^4$.

Exercice 3

A l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Application : Nombre de parties d'un ensemble à n éléments.

Soit $E = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$ un ensemble à n éléments. On souhaite savoir combien cet ensemble E a de partie, c'est à dire combien il y a d'élément dans $\mathcal{P}(E)$. Pour cela on dénombre combien E a de parties ayant 0 élément, 1 élément, 2 éléments, ..., n élément.

- **Nombre de partie à 0 élément :** Il s'agit du coefficient binomial
- **Nombre de partie à 1 élément :** Il s'agit du coefficient binomial
- ...
- **Nombre de partie à k éléments :** Il s'agit du coefficient binomial
- **Nombre de partie à n éléments :** Il s'agit du coefficient binomial

Le nombre de parties de E est donc . La formule du binôme de Newton permet alors d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est égal à