CHAPITRE 14

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SUITES

Dans tout le chapitre, on considérera des suites dont le premier terme est de rang 0 (notées généralement $(u_n)_{n\geq 0}$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Si le premier terme n'est pas de rang 0, les définitions et les résultats s'adaptent très facilement.

I. CONVERGENCE

Définition 1.1

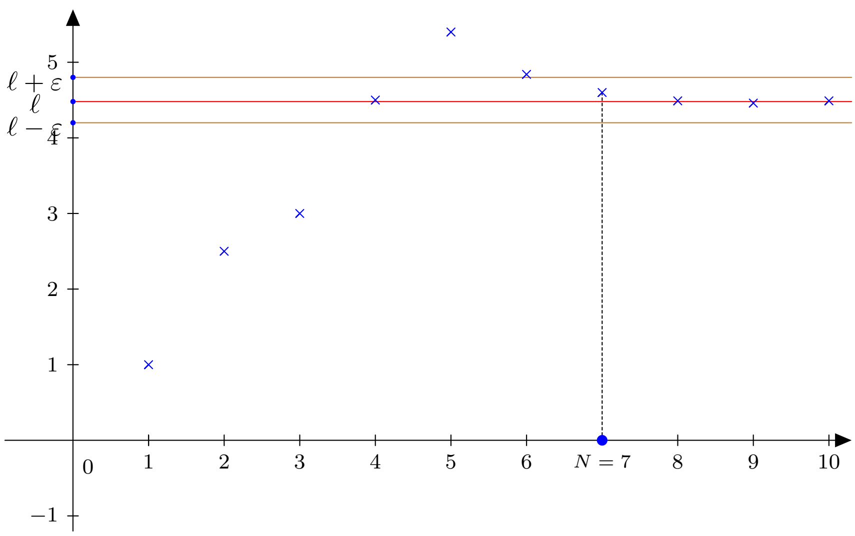
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et ℓ un réel. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ℓ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les termes u_n pour tous les indices n, à partir d'un certain rang.
Si cette limite existe, elle est et on note :

Cela se lit :

Remarque :

La définition se traduit mathématiquement par

Un exemple sur un dessin



Cela signifie qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente si et seulement si : ayant choisi un ε aussi petit que l'on veut, on peut trouver un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont à une distance de ℓ plus petite que ε.

Définition 1.2

Une suite qui converge vers un réel ℓ est dite **convergente** et une suite non convergente est dite **divergente**.

Exemple :

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0. En effet, si on se donne $\varepsilon > 0$, il nous faut trouver un N tel que pour tout $n \geq N$ $|u_n| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} \leq \varepsilon$. Il suffit de prendre $N = \lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$, car alors $n \geq N \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$.

On a montré que quelque soit $\epsilon > 0$, on est toujours en mesure de trouver un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n| \leq \varepsilon$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge donc bien vers 0.

Remarque :

Nous n'utiliserons pas à chaque fois la définition pour montrer la convergence d'une suite, nous disposerons d'un formulaire et de méthodes.

Il y a deux situations possibles pour une suite divergente :

- la suite peut « tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$ ».
- la suite peut ne pas admettre de limite (finie ou infinie) lorsque n tend vers $+\infty$.

Définition 1.3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge vers** $+\infty$ lorsque :
  On dit également que u_n **tend vers** $+\infty$ **lorsque** n **tend vers** $+\infty$ et on note
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge vers** $-\infty$ lorsque :
  On dit également que u_n **tend vers** $-\infty$ **lorsque** n **tend vers** $+\infty$ et on note

Autrement dit, une suite tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si pour tout réel A, on peut trouver un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs (resp. inférieurs) à A, ses termes peuvent ainsi être aussi grands (resp. petits) que l'on souhaite, à partir d'un certain rang.

Exemple :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^2$ diverge vers $+\infty$ car étant donné $A \in \mathbb{R}_+$, on toujours trouver un $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > A$. En effet,

$$u_n > A \Leftrightarrow n^2 > A \Leftrightarrow n > \sqrt{A}$$

il suffit alors de prendre $N = \lfloor \sqrt{A} \rfloor + 1$. On trouve ainsi que pour tout $n \geq N$, $n > \sqrt{A}$ et donc $u_n > A$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge bien vers $+\infty$.

Remarque :

Si une suite est bornée, alors elle ne tend pas vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Exemple :

1. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente car tous ses termes pairs valent 1 et tous ses termes impaires valent -1.
2. La suite $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente vers $+\infty$.
3. Les suites constantes et les suites stationnaires sont convergentes.

Attention:

On ne peut écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ qu'après avoir montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a effectivement une limite.

II. Limites de suites usuelles, opérations

II. 1 Limites de suites usuelles

Théorème 2.1

1. Soit $a > 0$.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a =$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^a} =$
2. Soit $q \in \mathbb{R}$.
   - Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n =$
   - Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n =$
   - Si $q \leq -1$, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite
3. Soit $a > 0$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n)^a =$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)^a} =$

Exemple :

On a en particulier :

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \ln(n)^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$$

Exemple :

Étudions la convergence de $(e^n)_{n\geq 0}$ et $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$.

Comme $e > 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

II. 2 Opérations sur les limites

Si on connaît la limite de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut, dans certains cas, déterminer la limite de leur somme $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou de leur produit $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ces propriétés sont résumées dans le tableau suivant. Dans certains cas on ne peut pas déterminer à priori si cette limite existe, on parle alors de **forme indéterminée** (notée FI dans les tableaux).

Dans cette partie, ℓ_1 et ℓ_2 désignent deux réels et k est un réel.

Limite d'une somme de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ_1	ℓ_1	ℓ_1	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$						

Limite du produit d'une suite par un réel

	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ_1	$+\infty$	$-\infty$
$k > 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} ku_n$			
$k < 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} ku_n$			

Limite d'un produit de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ_1	$\ell_1 \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ_2	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$				

Limite de l'inverse d'une suite

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell = 0^+$	$\ell = 0^-$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n}$				

Remarque :

Si la limite dans le tableau est notée $\pm\infty$, on déterminera facilement s'il s'agit de $+\infty$ ou de $-\infty$ en étudiant le signe.

Pour déterminer la limite de l'inverse d'une suite qui tend vers 0, on a besoin de supposer que le signe des termes de la suite soit constant à partir d'un certain rang.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, on notera $\ell = 0^+$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $u_n < 0$ à partir d'un certain rang, on notera $\ell = 0^-$.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers 4. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{4}$.

Remarque :

Le tableau précédent permet aussi d'étudier la convergence de suites de la forme $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, il suffit de remarquer que $\dfrac{u_n}{v_n} = u_n \times \dfrac{1}{v_n}$.

II. 3 Comment lever une forme indéterminée ?

Si l'on obtient une forme indéterminée, cela ne signifie pas que la suite considérée n'a pas de limite. Tous les cas peuvent se présenter. Il faut alors lever l'indétermination.

Méthode :

Une méthode efficace pour lever un grand nombre d'indéterminations est de mettre en facteur la quantité qui semble la plus importante dans l'expression de la suite.

Exercice 1

Déterminer si elles existent les limites des suites dont les termes généraux sont donnés par :

1. *pour tout* $n \geq 0$, $u_n = 3n^{13} - n^5 + 3n + 1$.
2. *pour tout* $n \geq 0$, $w_n = \dfrac{n^2 - 2n + 1}{n^3 + 2n^2 + 1}$.
3. *pour tout* $n \geq 2$, $z_n = \dfrac{2n^3 - 4n^2 + 1}{3n^3 - 1}$.

Les suites $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent toutes vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Dans des quotients, ces expressions donnent lieu à des formes indéterminées. Le théorème suivant permet de lever ces indéterminations.

Théorème 2.2 — Croissances comparées

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

1. Si $q \in]-1;1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{\alpha n} n^{\beta} =$
2. Si $q \in]-1;1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{\alpha n} \ln(n)^{\beta} =$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^{\alpha}}{\ln(n)^{\beta}} =$
4. Si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^{\beta}}{q^{\alpha n}} =$
5. Si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)^{\beta}}{q^{\alpha n}} =$
6. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)^{\beta}}{n^{\alpha}} =$

Remarques :

R1 – Ce théorème compare les vitesses auxquelles les suites $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $q > 1$, tendent vers $+\infty$. Pour mémoriser ces résultats, on retient : « n tend plus vite vers $+\infty$ que $\ln n$ en $+\infty$ et q^n tend plus vite vers $+\infty$ que n en $+\infty$ »

R2 – En particulier, si $q = e > 1$, ces croissances comparées permettent de comparées les puissances de n et $\ln(n)$ à e^n.

Exercice 2

Déterminer, si elles existent, les limites des suites dont les termes généraux sont donnés par :

1. *Pour tout* $n \geq 0$, $w_n = \dfrac{n^2 + 2e^{2n}}{3n^{14} + e^n}$.
2. *Pour tout* $n \geq 0$, $z_n = \dfrac{\ln(n) + n}{n^2 + e^n}$.

III. Limites et inégalités

III. 1 Propriétés de la limite

Proposition 3.1 — Limites et inégalités larges

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ et soient a et b deux réels.

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq a$ alors
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant b$ alors
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leqslant u_n \leqslant b$ alors

Les inégalités larges sont donc conservées par passage à la limite.

Exemple :

Si une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente vers un réel ℓ et positive. Que peut-on dire de sa limite ?
Comme elle est positive, cela signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. Par passage à la limite, on a donc $\ell \geq 0$.

Attention:

Les inégalités strictes ne sont pas conservées par passage à la limite ! Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > a$ et que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers un réel ℓ alors $\ell \geq a$ mais en toute généralité l'inégalité n'est pas stricte.

Exemple :

Pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{n} > 0$ et pourtant $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Proposition 3.2

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites et $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$.
On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_2.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ alors

Attention:

Dans ce cas aussi, les inégalités strictes ne sont pas conservées.

Exemple :

Que peut-on dire de deux réels a et b vérifiant la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a - \dfrac{1}{n} < b < a + \dfrac{1}{n}$?
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a - \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} a + \dfrac{1}{n} = a$, un passage à la limite dans l'inégalité précédente donne

$$\lim_{n\to+\infty} a - \frac{1}{n} \leq b \leq \lim_{n\to+\infty} a + \frac{1}{n} \Leftrightarrow a \leq b \leq a \Leftrightarrow a = b$$

Proposition 3.3

Toute suite convergente est bornée.

Attention:

La réciproque est fausse. Un contre-exemple est donné par la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$. Cette suite est bornée car tous les termes sont entre -1 et 1, mais elle ne converge pas.

III. 2 Comparaison de suites

Théorème 3.4 — de la limite par encadrement

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites et $\ell \in \mathbb{R}$.

On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Alors

Retenir

Si une suite est encadrée par deux suites tendant vers la même limite alors cette suite converge aussi vers cette limite.

Remarque :

Contrairement à la propriété de compatibilité du passage à la limite avec les inégalités larges, la force de ce théorème est de garantir l'existence de la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de suites intermédiaires.

Exercice 3

Étudions la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Théorème 3.5 — Limite et comparaison

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.

- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$
- Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$

Exercice 4

Étudier la convergence des suites $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n+(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

III. 3 Théorème de la limite monotone

Théorème 3.6 — de la limite monotone

- Toute suite croissante majorée converge.
- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante minorée converge.
- Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Attention:

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée par un réel M alors elle converge mais il n'y a aucune raison qu'elle converge vers M.

Retenir

Toute suite monotone admet donc une limite :

- Pour une suite croissante, cette limite est finie si la suite est majorée et infinie ($+\infty$) sinon;
- Pour une suite décroissante, cette limite est finie si la suite est minorée et infinie ($-\infty$) sinon.

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par $u_2 = 1$ et pour tout $n \geq 2$ par $u_{n+1} = u_n\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

1. *Montrer que pour tout $n \geq 2,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.*
2. *Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.*
3. *En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ converge et donner un encadrement de sa limite.*

IV. Limites de suites récurrentes.

Théorème 4.1 — Théorème du point fixe

Soit I un intervalle fermé, f une fonction définie sur I. Soit (u_n) une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. vérifiant

-
-
-

Alors la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. (On dit que ℓ est un **point fixe de** f.)

Remarque :

> Ce théorème permet de trouver la limite d'une suite convergente définie par récurrence.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x) + 1$. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. *Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$.*
2. *Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) \leq x$.*
3. *Montrer que (u_n) est décroissante.*
4. *Montrer que (u_n) converge et trouver sa limite.*

V. Suites adjacentes

Définition 5.1

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** lorsque :

1.
2.

Théorème 5.2

Deux suites adjacentes sont convergentes et elles convergent vers la même limite.

Exercice 7

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

Retenir

Si l'on montre que deux suites sont adjacentes, on sait d'après le cours que celles-ci sont convergentes et qu'elles ont la même limite.