Exercice 1

Déterminer, si elles existent, les limites des suites dont les termes généraux sont donnés par :

$$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{5}{n} + 1 \qquad b_n = -2n3^n \qquad c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad d_n = \frac{1}{(0.6)^n}$$

$$u_n = \frac{2^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{2}} \qquad v_n = 2^n - 3^n + 4^n \qquad w_n = \frac{(n+2)!}{(2n^2+1)\times n!}$$

Exercice 2

Déterminer si elles existent les limites des suites dont les termes généraux sont donnés par :

$$u_n = n^2 - 57n - 1 \qquad v_n = -5n^4 - 2n^2 + 5 \qquad w_n = \frac{5n^2+3n-5}{3n+2} \qquad z_n = \frac{3n^3+2n+2}{3n^2+9}$$

$$a_n = \frac{2n^2+3n+5}{-n^3+3n} \qquad b_n = \frac{2n\sqrt{n}+2}{n^3+1} \qquad c_n = \frac{n^2+(-1)^n}{n+\sqrt{n}} \qquad d_n = 4 + \frac{7\sqrt{n}}{3n+(-1)^n}$$

$$w_n = \frac{e^n+n}{n^2+\ln(n)} \qquad z_n = \frac{n^5+\ln(n)^2}{e^n+\ln(n)}$$

Exercice 3

Soit a un réel, $a \leqslant 1$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n+2}{3}$.

1. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1.
2. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. (a) Donner pour tout entier k compris entre 0 et n, un encadrement de $\frac{n}{n^2+k}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $1 \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{n}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^4$.

1. Déterminer la monotonie de la suite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$ puis étudier la convergence de (u_n).

Exercice 6

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \to x + \frac{1}{x} - 1$.

1. Montrer que $[1;+\infty[$ est stable par f. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1;\infty[$.
2. Montrer que pour tout $x \in [1;+\infty[$, $f(x) - x \leqslant 0$.
3. En déduire la monotonie de (u_n), puis étudier sa convergence.

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n+2}$.

1. Montrer que poru tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.

Exercice 8

1. Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$. Etudier les variations de f.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+1} = f(v_n)$.
   (a) Calculer v_1 et v_2.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n existe et $v_n > 1$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in [1;+\infty[$, $f(x) \leqslant x$.
   (d) En déduire la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (e) Que peut-on dire de la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{v_n - 1}$.
   (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Déterminer l'expression de u_n puis de v_n en fonction de $\mathbb{N}$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 9

Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ où pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{nn!}$ sont adjacentes. On admet que ces deux suites convergent vers e.