CHAPITRE 16

CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

I. CONTINUITÉ : DÉFINITIONS ET EXEMPLES

I. 1 CONTINUITÉ EN UN POINT

Définition 1.1

Soient f une fonction et x_0 un réel de son ensemble de définition.

- On dit que f est **continue** en x_0 lorsque la limite de f en x_0 existe et
- Si f n'est pas continue en x_0, on dit qu'elle est en x_0.

Autrement dit, une fonction f définie en x_0 est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Remarque :

Pour que f soit continue en x_0, il est nécessaire que f soit définie en x_0.

Exemples :

E1 – la fonction carré est continue en tout réel a car $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$.

E2 – La fonction partie entière est-elle continue en 1 ?

Exercice 1

Étudier la continuité en 0 de la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

I. 2 CONTINUITÉ À GAUCHE ET À DROITE

Définition 1.2

Soient f une fonction et x_0 un réel de son ensemble de définition.

- On dit que f est **continue à gauche** en x_0 lorsque la limite à gauche de f en x_0 existe et vaut $f(x_0)$. C'est-à-dire :
- On dit que f est **continue à droite** en x_0 lorsque la limite à droite de f en x_0 existe et vaut $f(x_0)$. C'est-à-dire :

Proposition 1.3

Soient f une fonction et x_0 un réel de son ensemble de définition. Alors f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0.

Exemple :

La fonction partie entière est-elle continue à gauche en 0 ? à droite en 0 ? Qu'en déduit-on ?

Exercice 2

Étudier la continuité en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

I. 3 CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE

Définition 1.4

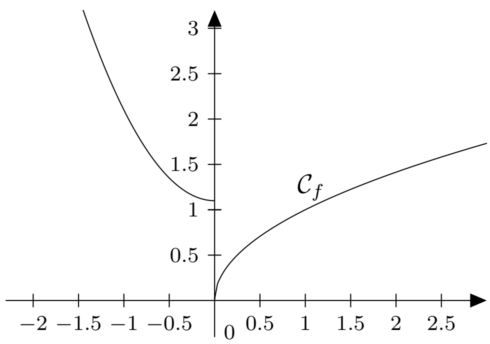
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est **continue sur** I lorsque

L'ensemble des fonctions continues sur I est noté :

Graphiquement, une fonction est continue si sa courbe représentative n'admet pas de « coupures », si on peut tracer celle-ci « sans lever le crayon »

Exemple :

La fonction dont la représentation graphique est la suivante n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (car elle n'est pas continue en 0) :



Théorème 1.5

Les fonctions constantes, puissances, valeur absoluee, $\ln$ et $\exp$ sont continues là où elles sont définies.

Attention:

La fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue sur son ensemble de définition (qui est $\mathbb{R}$) car elle est discontinue en tout entier. Par contre, elle est continue sur tout intervalle du type $]n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque :

La fonction $x \mapsto x\ln(x)$ n'est pas définie en 0, mais la fonction g de l'exemple 1 est un prolongement de cette fonction qui est continue en 0. C'est ce que l'on appelle un prolongement par continuité.

Théorème 1.6 — Prolongement par continuité

Soient f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$, **non définie** en x_0.
On dit que f est **prolongeable par continuité** en x_0 lorsque la fonction f admet une limite **finie** ℓ en x_0 .

Alors l'application $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(x) = \begin{cases} & \text{si} \quad x \in I \setminus \{x_0\} \\ & \text{si} \quad x = x_0 \end{cases}$ est continue en x_0, c'est le **prolongement par continuité** de f en x_0.

En particulier, si f est continue sur $I \setminus \{x_0\}$, alors la fonction $\tilde{f}$ est définie et continue sur I tout entier.

Exercice 3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. La fonction f_α est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

II. Opérations sur les fonctions continues

II. 1 Somme, produit et quotient

Proposition 2.1

- Soient f et g deux fonctions définies en $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Si f et g sont continues en x_0 alors les fonctions $f+g$, fg et λf sont continues en x_0.
  Si de plus g alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0.
- Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Si f et g sont continues sur I alors les fonctions $f+g$, fg et λf sont continues sur I.
  Si de plus g alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

Corollaire 2.2

- Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) est continue sur un intervalle où son dénominateur ne s'annule pas.

Exercice 4

1. Donner le domaine de définition et étudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto x^2 + x + |x|e^x$.
2. Donner le domaine de définition et étudier la continuité de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2xe^x + \ln x}{x}$.

II. 2 Composition

Notation : Soient I,J deux ensembles et f une fonction définie sur I. On note $f(I) \subset J$ si :

Proposition 2.3

- Soient f une fonction définie en $x_0 \in \mathbb{R}$ et g une fonction définie en $f(x_0)$.
  Si f est continue en et g est continue en alors $g \circ f$ est continue en
- Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J. Si :
  - ▷ f est continue sur
  - ▷ g continue sur
  - ▷ $f(I) \subset$

  Alors la fonction $g \circ f$ est continue sur

Exemple :

Donner l'ensemble de définition et étudier la continuité sur celui-ci de $x \mapsto \sqrt{2x+1}$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - x - 2$. Déterminer l'ensemble de définition de $\ln \circ f$ et étudier sa continuité.

Proposition 2.4

Soient f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$, $\ell \in \mathcal{D}_f$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}_f$ (c'est-à-dire : pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathcal{D}_f$).

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et si f est **continue** en ℓ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) =$

Exercice 6

Soient f une fonction continue en tout point de $\mathbb{R}$, minorée par 1 et $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
2. Montrer par l'absurde que la suite ne peut pas être convergente.
3. Que peut-on dire de la divergence de $(u_n)_{n\geq 0}$?

III. Théorème des valeurs intermédiaires

III. 1 Image d'un intervalle

Définition 3.1

Soient E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle **image** de E par f, et on note $f(E)$ l'ensemble des images des éléments de E, c'est-à-dire :

Remarques :

R1 – Les intervalles I et $f(I)$ n'ont pas forcément les mêmes propriétés (bornes finies, infinies, exclues, incluses).

R2 – On peut préciser la forme de l'intervalle $f(I)$ lorsque la fonction f est strictement monotone.

Proposition 3.2

Soit I un intervalle de bornes a et b (a et b étant deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$).
On suppose que f est une fonction continue et strictement croissante sur I.

- si $I = [a, b]$ alors $f(I) =$
- si $I =]a, b[$ alors $f(I) =$
- si $I = [a, b[$ alors $f(I) =$
- si $I =]a, b]$ alors $f(I) =$

Remarque :

Dans le cas où la fonction f est strictement décroissante et continue sur I, on a :

- si $I = [a, b]$ alors
- si $I =]a, b[$ alors
- si $I = [a, b[$ alors
- si $I =]a, b]$ alors

Méthode :

Pour obtenir l'image d'un intervalle par une fonction continue, on étudie les variations de la fonction (parfois sur plusieurs intervalles si la fonction change de variations).

Exercice 7

Soit f la fonction définie par $f(x) = (\ln x)^2 + 1$. Déterminer $f(]0, e])$ et $f([e^2, +\infty[)$.

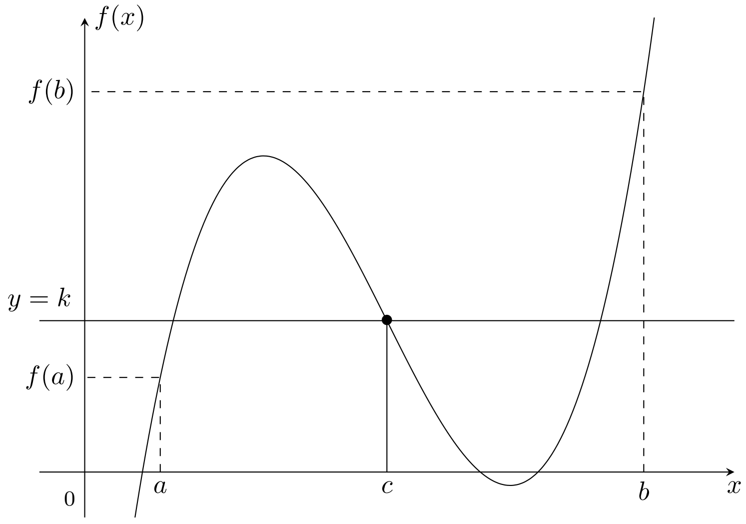
III. 2 Énoncé et variantes

Théorème 3.3 — des valeurs intermédiaires

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème 3.4 — Énoncé équivalent

Soient a et b deux réels avec $a < b$ et f une fonction définie sur le segment $[a, b]$.
Si f est continue sur $[a, b]$



Remarque :

Le théorème des valeurs intermédiaires est un théorème d'existence. A la question « Existe-t-il un réel c tel que $f(c) = k$? » ou encore « Existe-t-il une solution à l'équation $f(x) = k$? », il répond « Oui, il en existe ». Mais il est important de noter que ce théorème ne dit rien à propos de :

- L'unicité d'une telle solution, il dit seulement qu'il en existe au moins une.
- La valeur d'une telle solution, il ne dit pas comment l'obtenir. Cependant, la démonstration de ce théorème par la **méthode de dichotomie** fournit une méthode concrète d'approximation d'une solution (on verra cela en TP).

Exemple :

Soit f la fonction définie pour tout $x \in [-1, 2]$ par $f(x) = x^3 + x^2 - x$.

1. Justifier que f est continue sur $[-1, 2]$.

2. Calculer $f(-1)$ et $f(2)$.

3. Montrer l'existence d'un réel c tel que $f(c) = 5$.

Théorème 3.5 — Théorème des valeurs intermédiaires : une variante

Soient f une fonction continue sur $]a, b[$ (a et b peuvent être infinis) admettant une limite à droite en a et une limite à gauche en b. Alors pour tout réel $k \in \left] \lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x) \right[$, il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = k$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie pour tout $x \in]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$.
Montrer que l'équation $f(x) = 10$ admet au moins une solution.

Proposition 3.6 — Une autre variante

Soient a et b deux réels avec $a < b$ et f une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Si $f(a)f(b) \leq 0$ alors il existe un réel c tel que

Remarque :

En d'autres termes, toute fonction continue qui change de signe sur un intervalle I, s'annule au moins une fois sur I.

III. 3 Théorème de la bijection

Théorème 3.7 — de la bijection

- Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f est bijective de I sur l'intervalle
- De plus sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur l'intervalle , elle est strictement monotone sur et a les mêmes variations que f.

Exemple :

Fonction exponentielle et logarithme népérien.

Corollaire 3.8

Soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ et k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe un **unique** $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = k$.

Autrement dit, si l'on rajoute l'hypothèse de **stricte monotonie** aux hypothèses du Théorème des valeurs intermédiaires, on obtient l'**unicité** du réel c.

Remarque :

Le résultat précédent admet ici aussi une variante avec des limites.

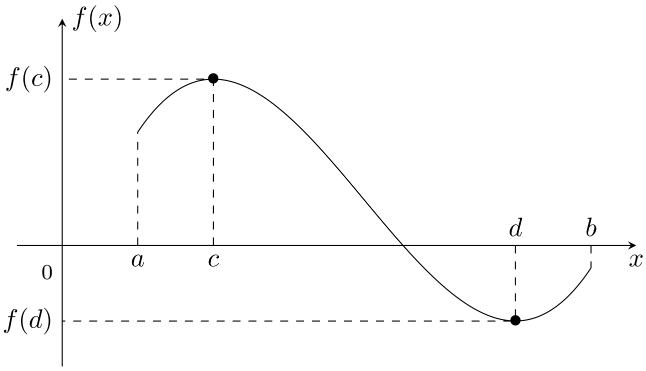
Exercice 9

Montrer que le polynôme $P : x \mapsto x^2 - 4x + 1$ a une unique racine entre 0 et 1.

IV. Extrema d'une fonction continue sur un segment

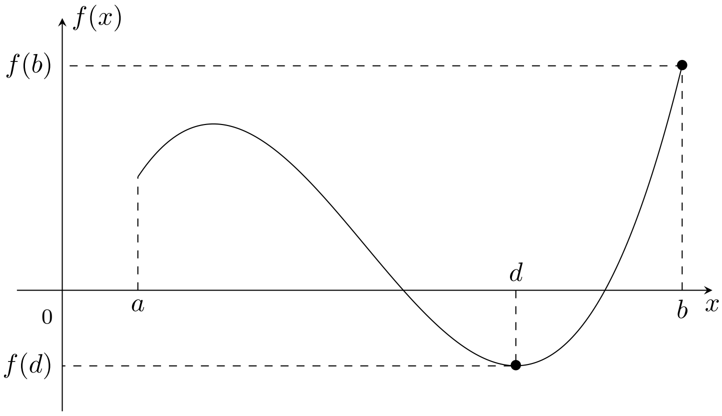
Théorème 4.1

Soient a et b deux réels avec $a < b$ et soit f une fonction définie sur le segment $[a, b]$.
Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est bornée et atteint ses bornes sur $[a, b]$.
En d'autres termes, f possède un minimum et un maximum sur $[a, b]$.



Remarques :

- **R1 –** Ce théorème donne l'existence d'un minimum et d'un maximum sur $[a, b]$ mais ne dit pas comment les déterminer. Une **étude de fonctions** permet de déterminer des extrema.
- **R2 –** Le maximum ou le minimum peuvent se situer sur une extrémité du segment, par exemple :



Corollaire 4.2

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
Si f est une fonction continue sur le segment $[a, b]$ alors on a :

$$f([a, b]) = \left[\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)\right]$$