## Définition de la continuité

### Exercice 1

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} |x| + x + 1 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ \sqrt{x}(x^2+2) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

La fonction $f$ est-elle continue en 1 ?

### Exercice 2

Soient $k \in \mathbb{R}$ et $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 4 \\ (x+k)^2 & \text{si} \quad x \leqslant 4 \end{cases}$$

Déterminer la (les) valeur(s) de $k$ pour que $f$ soit continue en 4.

## Prolongement par continuité

### Exercice 3

Rappeler le domaine de définition de $x \mapsto x^x$. Cette fonction admet-elle un prolongement en 0 ?

### Exercice 4

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}$.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de $f$.
2. Étudier la continuité de $f$ sur son domaine de définition.
3. La fonction $f$ admet-elle un prolongement en $x = 1$ ?

## Opérations sur les fonctions continues

### Exercice 5

1. Étudier la continuité de la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{2xe^x + \ln x}{x}$.
2. Étudier la continuité de la fonction $g$ définie par $g(x) = \dfrac{4x^3 - 5x + 2}{x^2 - 3x + 2}$.
3. Étudier la continuité de la fonction $h$ définie par $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{(2x+1)^3}$.

## Composition

### Exercice 6

Étudier la continuité des fonctions définies par

1. $f(x) = \sqrt{1-4x^2}$
2. $g(x) = \ln(1+x+x^2)$
3. $h(x) = e^{\frac{2x}{x+1}}$
4. $i(x) = (1+x^2)^x$

### Exercice 7

Étudier la continuité sur $[-1, 2]$ de la fonction $f$ définie par $f(x) = x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

## Théorème des valeurs intermédiaires

### Exercice 8

On considère la fonction polynomiale $P$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 6$. Montrer que $P$ admet au moins une racine.

### Exercice 9

Montrer que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine. Ce résultat est-il encore vrai pour les polynômes de degré pair ?

### Exercice 10

Soit $f$ une fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$. Montrons que $f$ admet au moins un point fixe c'est-à-dire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution. On pourra considérer la fonction $g$ définie pour tout $x \in [0, 1]$ par $g(x) = f(x) - x$.

### Exercice 11

1. Montrer que l'équation $\ln x = 2 - x$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction polynomiale $P$ définie par $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$.
   En déduire le nombre et le signe des racines réelles de $P$.
3. Étudier les solutions (existence et nombre) de l'équation $\ln(x)e^x - 3 = 0$ sur $]1, +\infty[$.

### Exercice 12

On considère un réel $p \in ]0, 1[$ et on note $q = 1 - p$. Montrer que l'équation $x^2 - qx - pq = 0$ admet deux racines réelles distinctes, notées $r$ et $s$, vérifiant $-1 < r < 0 < s < 1$.

## Image d'un intervalle

### Exercice 13

Soient $f, g$ et $h$ les fonctions définies par $f(x) = x^2$, $g(x) = (\ln x)^2 + 1$ et $h(x) = xe^x$.

1. Montrer que $f(]-1, 2[)$ est un intervalle et déterminer cet intervalle.
2. Montrer que $g(]0, e[)$ est un intervalle et déterminer cet intervalle.
3. Déterminer $h(]-\infty, -1[$ et $h(]-1, +\infty[)$.

## Théorème de la bijection

### Exercice 14

La fonction sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\cdot$

1. Montrer que sh est bijective.
2. Déterminer sa bijection réciproque (résoudre $f(x) = y$ en posant $X = e^x$ et se ramener à une équation du second degré).

### Exercice 15

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}\cdot$

1. Montrer que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.
2. Expliciter $f^{-1}$ et dresser son tableau de variations.

### Exercice 16

On considère la fonction $f$ définie sur $I = ]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$. Montrer que $f$ réalise une bijection de $I$ sur un intervalle $J$ que l'on déterminera.