CHAPITRE 17

SÉRIES

I. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

I. 1 Définitions

Définition 1.1

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels.

- On associe à $(u_n)_{n\geq 0}$ une nouvelle suite $(S_n)_{n\geq 0}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n =$$

- On appelle **série de terme général u_n**, la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ que l'on note $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.
- Le nombre S_n est appellé la n-ième de la série de terme général u_n.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels. Alors :

- $S_0 =$
- $S_1 =$
- $S_2 =$
- $S_3 =$

Exercice 1

Donner l'expression des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geq 0} q^n$, $q \in \mathbb{R}$.

Remarque :

Si une suite a pour premier indice $n_0 \in \mathbb{N}$, la série de terme général $(u_n)_{n\geq n_0}$ a aussi pour premier indice n_0 et on note cette série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$. Ainsi les sommes partielles S_n ne sont définies que pour $n \geq n_0$ par :

$$S_n =$$

Dans la suite, on considèrera dans les définitions/résultats que $n_0 = 0$.

Définition 1.2

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ la suite de ses somme partielles.

- $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est dite **convergente** (resp. **divergente**) si la suite des sommes partielles $\left(S_n\right)_{n\geq 0} = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geq 0}$ converge (resp. diverge).

- Déterminer **la nature d'une série**, c'est étudier la convergence de cette série (c'est à dire la convergence de la suite des sommes partielles).

- Si la suite des sommes partielles $\left(S_n\right)_{n\geq 0}$ converge vers S, on dit que S est la **somme de la série** de terme général u_n. En cas de convergence et **uniquement dans ce cas**, on note :

Remarques :

R1 – Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et (S_n) la suite de ses sommes partielles. Si la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge vers $S \in \mathbb{R}$ alors :

La somme d'une série convergente est donc la limite de la suite des sommes partielles.

R2 – On ne peut pas écrire $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ avant d'avoir prouvé la convergence de la série.

Attention:

Il faut faire attention aux notations et ne pas confondre la série, la somme d'une série et les sommes partielles de cette série.

- $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ désigne la : c'est une autre notation pour la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 0}$.
- $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ désigne la (c'est une somme finie de nombres).
- $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ désigne la de la série, c'est-à-dire la limite des sommes partielles. La somme de la série existe uniquement quand il y a convergence.

Exercice 2

1. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = q^n$.
2. Étudier la nature de la série de terme général $v_n = n$.

I. 2 Condition de convergence d'une série

Proposition 1.3 — Condition nécessaire de convergence d'une série

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite.

- **Si** $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge **alors** $(u_n)_{n\geq 0}$
- **Si** $(u_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers 0 **alors** la série de terme général u_n est divergente : on dit même qu'elle est **grossièrement divergente**.

Autrement dit : $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Attention:

La réciproque est fausse : la série harmonique $\left(\text{de terme général } u_n = \frac{1}{n} \text{ pour } n \geqslant 1\right)$ est un contre exemple. (cf. exercice du TD)

Proposition 1.4

La série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et pourtant $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0\cdot$

Méthode :

Lorsqu'on étudie la nature d'une série, deux cas se présentent :

- Si le terme général de la série ne tend pas vers 0, la série diverge **grossièrement**.
- Si le terme général de la série tend vers 0, on ne peut rien dire à priori concernant la nature de cette série.

Exemple :

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^n}{n}$ diverge grossièrement car $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$ d'après le théorème des croissances comparées.

Proposition 1.5 — Convergence et premiers termes

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite.

- Soit $(p, l) \in \mathbb{N}^2$. Les séries $\sum_{n\geq p} u_n$ et $\sum_{n\geq l} u_n$ sont de même nature (simultanément convergentes ou simultanément divergentes).
- Dans le cas où ces séries convergent et si $l > p$ alors on a : $\sum_{k=p}^{+\infty} u_k =$.

Autrement dit, la convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes de celle-ci. Par contre, si il y a convergence, la somme de la série dépend des premiers termes.

Exercice 3

Étudier la nature de $\sum_{n\geq 3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et sa somme si celle-ci est convergente.

I. 3 Cas des séries à termes positifs

On dit qu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est à termes positifs si pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 0$.

Dans le cas des séries à termes positifs, on peut remarquer que la suite des sommes partielles est croissante, en effet :

Le théorème de la limite monotone permet alors de dire

- Soit
- Soit

En pratique, on utilise souvent le théorème suivant :

Théorème 1.6 — Comparaison des séries à termes positifs

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$. Alors

1. Si $\sum_{n\geq 0} v_n$
2. Si $\sum_{n\geq 0} u_n$

Remarque :

Ce résultat est encore valable si l'inégalité $0 \leq u_n \leq v_n$ n'a lieu qu'à partir d'un certain rang.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n\geq 3}$ une suite telle que pour tout $n \geq 3$ $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, alors comme $\sum_{n\geq 3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série à termes positifs convergente, alors par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 3} u_n$ converge.

II. Les séries de référence

II. 1 Les séries géométriques et leurs dérivées

Théorème 2.1

Soit $q \in \mathbb{R}$. Les séries de termes généraux $u_n = q^n$, $v_n = nq^{n-1}$ et $w_n = n(n-1)q^{n-2}$ convergent si et seulement si $-1 < q < 1$.

Théorème 2.2

- Si $-1 < q < 1$ alors :
  - $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k =$ *(Somme de la série géométrique)*
  - $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} =$ *(Somme de la série géométrique dérivée d'ordre 1)*
  - $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} =$ *(Somme de la série géométrique dérivée d'ordre 2)*

Remarques :

R1 – On connaît la somme de ces séries quand elles convergent.

R2 – Ces séries sont très utilisées en probabilités.

R3 – La somme de la série géométrique peut se généraliser au cas d'un premier rang quelconque : si $-1 < q < 1$: $\sum_{k=p}^{+\infty} q^k =$.

Exercice 4

Étudier les séries dont les termes généraux sont donnés par

1. $u_n = \dfrac{1}{3^n}$, $n \geq 0$.
2. $v_n = \dfrac{n}{4^{n-1}}$, $n \geq 1$
3. $w_n = \dfrac{5n(n-1)}{6^{n-2}}$, $n \geq 2$.
4. $w_n = \dfrac{4^n}{5}$, $n \geq 0$.

II. 2 La série de l'exponentielle

Théorème 2.3

La série de terme général $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$ s'appelle **série de l'exponentielle**.

Elle converge pour tout réel x et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} =$$

Exercice 5

Étudier les séries dont les termes généraux sont donnés par

1. $u_n = \dfrac{3^n}{n!}$, $n \geq 0$.
2. $v_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}$, $n \geq 1$.

Les séries de Riemann

Proposition 2.4

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si

Exemple :

- Séries de Riemann convergentes :
- Séries de Riemann divergentes :

III. Techniques de calculs

III. 1 Linéarité

Proposition 3.1 — Combinaison linéaire de séries convergentes

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles.

- **Si les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ convergent** et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :
- On a alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda u_k) =$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k) =$

Exercice 6

Étudier la série de terme général $w_n = \dfrac{2}{3^n n!} + \dfrac{n}{4^{n-1}}$, $n \geq 2$.

III. 2 Liens entre Suite et Série : le télescopage

Le télescopage permet de calculer des sommes mais aussi de passer de suites à séries, changement de point de vue qui s'avère souvent intéressant.

Exercice 7

Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour $n \geq 1$ est convergente et donner sa limite. On déterminera au préalable deux réels a et b tels que $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 8

Étudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et donner sa somme si celle-ci est convergente.

III. 3 Quelques méthodes

Il peut arriver que l'on ne voit pas apparaître directement les termes généraux des séries de référence. Dans ce cas, un changement d'indice ou un découpage de la somme peut parfois nous ramener à une série de référence.

Méthode :

Il est parfois utile, pour faire apparaître des séries usuelles, d'utiliser que $k^2 = k(k-1) + k$, ou que $k = (k-1) + 1$.

Exercice 9

Étudier les séries dont les termes généraux sont donnés par

1. $u_n = \dfrac{n^2}{5^n}$, $n \geq 0$.
2. $v_n = \dfrac{n(n+1)}{5^{n+1}}$, $n \geq 1$.
3. $w_n = \dfrac{n}{(n-1)!}$, $n \geq 2$.

IV. Convergence absolue

Définition 4.1

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On dit que la série de terme général u_n est **absolument convergente** si la série de terme général $|u_n|$ converge.

Autrement dit, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.

Remarque :

Une série à termes positifs qui converge est donc absolument convergente.

Théorème 4.2

Si une série est absolument convergente **alors**

Exemple :

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ est-elle convergente ?