Exercice 1

Déterminer la série de terme général u_n pour chaque suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie ci-dessous. Ces séries sont-elles convergentes ? Si oui, donner la somme de ces séries.

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \forall n\in\mathbb{N}, u_n = n^3 \qquad \forall n\in\mathbb{N}^*, u_n = \ln(n)$$

Exercice 2

Montrer que les séries de terme général suivant convergent et calculer leurs sommes.

1. $a_n = \dfrac{1}{3^n}, n \geqslant 0$
2. $b_n = \dfrac{n}{2^n}, n \geqslant 0$
3. $c_n = (5n-2)3^{-n-1}, n \geqslant 2$
4. $d_n = \dfrac{n^2x^n}{n!}, n \geqslant 0, x \in]-1,1[$
5. $e_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}, n \geqslant 0.$
6. $f_n = \dfrac{1}{(n+3)!}, \ n \geqslant 0.$
7. $h_n = \dfrac{n^2+3n-2}{n!}, n \geqslant 3$
8. $i_n = \dfrac{n^2}{2^n}, \ n \geqslant 0.$
9. $j_n = \dfrac{2^n}{(n+1)!}, \ n \geqslant 0.$
10. $k_n = \dfrac{n2^n}{n!}, \ n \geqslant 0.$
11. $l_n = \dfrac{1}{3^n} + \dfrac{5n(n-1)}{6^{n-2}}, \ n \geqslant 2.$
12. $m_n = \dfrac{n3^{n+1}}{5^n} + \dfrac{5}{(n+1)!}, \ n \geqslant 2.$
13. $o_n = (n+1)^2e^{-n}, \ n \geqslant 4.$

Exercice 3

On considère la série de terme général $u_n = \ln\left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right), \ n \geqslant 1.$

1. Calculer la somme partielle S_n en modifiant l'expression de u_n pour faire apparaître des sommes télescopiques.
2. En déduire que la série de terme général u_n converge et calculer la valeur de la somme de cette série.

Exercice 4

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{2}{n(n+1)(n+2)}, \ n \geqslant 1.$

1. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$$
2. En déduire la valeur des sommes partielles S_n de cette série.
3. En déduire que la série de terme général u_n converge et calculer la valeur de la somme de cette série.

Exercice 5

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)$.
2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge et donner sa limite.

Exercice 6

1. Montrer à l'aide d'une étude de fonctions que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.
2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \ln(n+1)$. En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.
4. Déterminer un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant 10$. Comment pouvait-on être sur que ce rang existe ?

Exercice 7

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et on note S_n sa n-ième somme partielle pour $n \geqslant 1$.

1. Montrer que pour tout $k \geqslant 2$,
$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,
$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leqslant S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$
3. Montrer que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée. Qu'en déduit-on ?

Exercice 8

Déterminer la nature des séries suivantes :

- $\sum_{n\geqslant 1} \frac{ln(n)}{n}$
- $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n2^n}$
- $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2-1}$
- $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4+n^3+3n+1}$
- $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^n}$
- $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1)}{e^n+e^{-n}}$