CHAPITRE 18

PROBABILITÉS - GÉNÉRALISATION

I. ESPACE PROBABILISABLE

I. 1 INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, on s'est intéressé à des expériences où l'univers était fini. Dans de nombreuses expériences, l'univers Ω peut-être infini.

Exemples :

E1 – On jette une pièce et on s'arrête lorsqu'on obtient pile.
E2 – On jette un dé équilibré une infinité de fois.
E3 – On choisit un réel au hasard entre 0 et 1.

Dans le cas d'un univers Ω fini, une probabilité est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ (l'ensemble des parties de Ω) dans $[0, 1]$ vérifiant certaines propriétés. Ainsi tout sous-ensemble de Ω était un évènement. Dans le cas général, on ne peut malheureusement pas donner le statut d'évènement à tout sous-ensemble de Ω. Les raisons dépassent le cadre de ce cours mais l'idée est que donner la probabilité d'un ensemble c'est le mesurer et qu'il n'est pas possible de « tout mesurer » car certains ensembles infinis peuvent être très complexes. Les évènements feront donc partie en général d'un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ plus petit (au sens de l'inclusion) que $\mathcal{P}(\Omega)$.
En se basant sur le cas d'un univers fini, certaines propriétés de l'ensemble contenant les évènements semblent assez « naturelles » :

- Cet ensemble doit contenir l'évènement certain Ω.
- Lorsque l'on considère un évènement, on doit pouvoir considérer son évènement contraire.
- L'union d'évènements doit encore être un évènement.
- L'intersection d'évènements doit encore être un évènement.

I. 2 ENSEMBLE DES ÉVÈNEMENTS

Définition 1.1 — Tribu d'événements

Soit Ω un ensemble.

- Une famille $\mathcal{A}$ de parties de Ω est une **tribu sur Ω** (ou une **$\sigma-$algèbre sur Ω**) si elle satisfait les trois axiomes suivants :
  1. $\Omega \in \mathcal{A}$
  2. $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire. C'est-à-dire : pour tout $A \in \mathcal{A}$,
  3. $\mathcal{A}$ est stable par réunion indexée par une partie de $\mathbb{N}$. C'est à dire : pour tout $I \subset \mathbb{N}$ et toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{A}$,
- Les éléments de $\mathcal{A}$ (qui sont donc des sous-ensembles de Ω) sont appelés évènements.
- $\mathcal{A}$ est appelée **tribu d'événements**, c'est l'ensemble de tous les évènements.
- Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé

Autrement dit, si l'on considère un univers Ω associé à une expérience aléatoire, une tribu est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- La tribu contient l'univers Ω.
- Si la tribu contient un ensemble, son complémentaire est aussi dans la tribu.
- Si la tribu contient des ensembles (indexés par une famille de $\mathbb{N}$), elle contient aussi l'union de tous ces ensembles.

Proposition 1.2 — Evènements d'une tribu

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble Ω.

- $\varnothing \in \mathcal{A}$ (c'est un événement).
- Toute réunion ou intersection (finie ou infinie) d'évènements, est un évènement.

Exemples :

E1 – Soit Ω un ensemble fini ou infini dénombrable. Alors $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu.

E2 – Soit Ω un ensemble et $A \subset \Omega$. Alors $\mathcal{A} = \{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu.

Retenir l'essentiel : $\mathcal{A}$ est l'ensemble des événements. Si A est un événement alors $\overline{A}$ aussi. Une réunion ou une intersection (indexée par une partie de $\mathbb{N}$) d'événements est encore un événement. En pratique, $\mathcal{A}$ n'est pas précisée.

I. 3 Évènements

Les évènements sont des sous-ensembles de la tribu $\mathcal{A}$ mais on ne doit pas oublier le point de vue probabiliste d'un évènement : c'est l'ensemble qui contient les issues qui le réalisent. En particulier, si I une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$:

- $\bigcap_{k\in I} A_k$ est réalisé si et seulement si
- $\bigcup_{k\in I} A_k$ est réalisé si et seulement si
- $A \backslash B = A \cap \overline{B}$ est réalisé ssi

Remarque :

Les univers que nous allons considérer pouvant admettre un nombre infini d'éléments, le nombre d'évènements pourra lui aussi être infini. Nous serons donc amenés à manipuler des unions et des intersection infinies d'évènements (indexés par des sous-ensembles de $\mathbb{N}$).

Notation : Soient E un ensemble et $(A_i)_{i\geq 0}$ une famille de sous-ensembles de E indexée par $\mathbb{N}$. Alors :

- $x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \Leftrightarrow$
- $x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \Leftrightarrow$

Proposition 1.3 — Distributivité

Soient I une partie de $\mathbb{N}$, $(A_n)_{n\in I}$ une famille d'événements et B un événement d'une tribu $\mathcal{A}$. Alors

$$B \cap \left(\bigcup_{n\in I} A_n\right) = \qquad \text{et} \qquad B \cup \left(\bigcap_{n\in I} A_n\right) =$$

Proposition 1.4 — Lois de Morgan

Soient I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles d'un ensemble X. Alors :

- $\overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i} =$
- $\overline{\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i} =$

Définition 1.5 — Système complet d'événements

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble Ω et $I \subset \mathbb{N}$ (I fini ou non).
Une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements est appelée un **système complet d'événements** de Ω lorsque, quelle que soit l'issue de l'expérience, un et un seul des événements A_i est réalisé. Autrement dit si les événements A_i ($i \in I$) sont deux à deux incompatibles et que leur union est Ω.

Exemples 1.6 :

▷ Si $A \in \mathcal{A}$, alors $(A\,,\,\overline{A})$ est un système complet d'événements de Ω.

▷ Si $\Omega = \{\omega_k\ ,\ k \in \mathbb{N}\}$ et si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors $\big(\{\omega_k\}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est un S.C.E de Ω.

Exercice 1

On considère l'expérience suivante : on jette une infinité de fois une pièce de monnaie. Donner un système complet d'évènements $(A_n)_{n\geq 0}$ associé à l'apparition du premier Pile.

II. Espace probabilisé (cas général)

II. 1 Définitions

Définition 2.1

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un espace Ω.

- On appelle **probabilité** sur $(\Omega\,,\,\mathcal{A})$ toute application $\mathrm{P} : \mathcal{A} \mapsto [0,1]$ telle que :
  1. $\mathrm{P}(\Omega) =$
  2. P est une application **σ−additive** : pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'**événements deux à deux incompatibles**,

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \qquad\qquad\qquad (\sigma - \text{additivité})$$

- Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ est appelé **espace probabilisé**.
- Pour $A \in \mathcal{A}$, le nombre $\mathrm{P}(A)$ est la **probabilité de l'événement A**.

Remarques :

R1 – Il faut bien comprendre la définition, l'affirmation $\mathrm{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_k)$, signifie que la série de terme général $P(A_n)$ converge (**pas besoin de le vérifier**) et que sa somme est $\mathrm{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)$.

R2 – On peur remplacer $\mathbb{N}$ par un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ dans la définition.

Exercice 2

On jette une infinité de fois une pièce équilibrée. Pour tout $n \geq 1$, on note B_n l'évènement « On obtient pour la première fois Pile au $(2n)$-ième lancer ». Exprimer l'évènement C : « On obtient pour la première fois Pile dans un lancer pair » en fonction des évènements B_n, $n \geq 1$. En déduire la probabilité de C.

Définition 2.2

- Un événement est dit **presque sûr** lorsque sa probabilité vaut
- Un événement est dit **presque impossible** ou **négligeable** lorsque sa probabilité vaut

II. 2 Propriétés

Toutes les propriétés vues dans le cas d'un univers fini sont encore vraies dans le cas d'un univers infini.

Proposition 2.3

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé. Alors :

1. $P(\varnothing) =$
2. Si les événements $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ sont **deux à deux incompatibles**, alors : $\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) =$
3. En particulier si A et B sont deux événements **incompatibles** alors :$\mathrm{P}(A \cup B) =$
4. Pour tout $(A, B, C) \in \mathcal{A}^3$, on a :
   - $\mathrm{P}(\overline{A}) =$
   - $\mathrm{P}(A \backslash B) =$
   - $\mathrm{P}(A \cup B) =$
   - Si $A \subset B$ alors
   - On a la formule du crible :

Exercice 3

Reprenons l'exemple précédent. Quelle est la probabilité d'obtenir Pile pour la première fois dans un lancer impair ?

Proposition 2.4

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ est un espace probabilité et $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $(A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n)$ est un système complet d'évènements de Ω alors $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) =$
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements de Ω alors $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_k) =$ La **convergence est assurée** par définition d'une probabilité.

Exercice 4

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Lors d'une expérience aléatoire, on choisit un entier naturel en connaissant les règles suivantes : la probabilité d'obtenir un entier k vaut $\lambda/2^k$. Déterminer λ pour que cela définisse bien une probabilité. Quelle est la probabilité d'obtenir un entier inférieur ou égal à 10 ? un entier pair ?

II. 3 Probabilités conditionnelles

Dans cette section, on se place dans le cadre d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ quelconque. Tout ce qui a été vu dans le chapitre précédent dans le cas d'un univers fini reste vrai dans le cas d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ quelconque.

Définition 2.5

Soit B un événement tel que $\mathrm{P}(B) \neq 0$.
Pour tout événement A on appelle **probabilité de** A **sachant** B le nombre $\mathrm{P}_B(A)$ défini par

Proposition 2.6

Soit B un événement tel que $\mathrm{P}(B) \neq 0$.
L'application P_B de $\mathcal{A}$ dans $[0,1]$ qui à tout $A \in \mathcal{A}$ associe $\mathrm{P}_B(A)$ est une probabilité.

Corollaire 2.7

Soient B un événement tel que $\mathrm{P}(B) \neq 0$ et A, C deux évènements. Alors

- $\mathrm{P}_B(\Omega) =$
- $\mathrm{P}_B(\varnothing) =$
- $\mathrm{P}_B(\overline{A}) =$
- $\mathrm{P}_B(A \cup C) =$

III. Indépendance

Dans cette section, on se place dans le cadre d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ quelconque. Tout ce qui a été vu dans le chapitre précédent dans le cas d'un univers fini reste vrai dans le cas d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ quelconque.

Définition 3.1

- On dit que deux événements A et B sont **indépendants** lorsque
$$\mathrm{P}(A \cap B) =$$
- Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements. Ces événements sont dits **mutuellement indépendants** si pour toute partie **finie** I de $\mathbb{N}$,
$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) =$$

Attention:

Ne pas confondre indépendants et incompatibles.

Remarque :

L'indépendance mutuelle d'une famille finie ou infinie d'événements sera une hypothèse (qui peut être implicite) de l'énoncé.

IV. Calculs de probabilités

IV. 1 Comment calculer la probabilité d'un seul évènement ?

Sauf dans quelques cas faciles, où dans des situations d'équiprobabilités, calculer la probabilité d'un évènement peut se faire l'aide de la formule

Théorème 4.1 — Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé.

- Si $\left(A_k\right)_{k\geq 0}$ est un système complet d'événements, alors pour tout événement E, on a :

$$\mathrm{P}(E) =$$

- Si de plus les A_k sont tous de probabilités non nulles pour tout $k \geq 1$, alors pour tout événement E, on a :

$$\mathrm{P}(E) =$$

Remarques :

R1 – Cette formule requiert un SCE, qu'on détermine en général grâce à l'énoncé.

R2 – C'est **cette formule qui permet d'obtenir les relations de récurrence** dans presque tous les exercices de probabilités.

R3 – La formule des probabilités totales garantit la convergence des séries.

IV. 2 Comment calculer une probabilité conditionnelle ?

On peut bien sûr utiliser, quand c'est possible la définition. Une formule souvent bien utile est la suivante :

Proposition 4.2 — Formule de Bayes

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé.

- Si A et B sont des événements probabilités non nulles, alors

$$\mathrm{P}_B(A) \ =$$

- Si $\left(A_k\right)_{k\geq 0}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{P}_B(A_i) =$$

IV. 3 Comment calculer la probabilité d'une intersection finie ?

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'évènements de probabilités non nulles. On cherche à calculer $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$.

La première question à se poser est : **Est-ce que ces évènements sont mutuellement indépendants ?**

- Si **OUI**, alors

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) =$$

- Si **NON**, alors on utilise la formule des probabilités composées

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) =$$

Remarques :

R1 – On suppose ici que $P\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$.

R2 – La formule des probabilités composées est une généralisation du cas indépendants, car si tous les A_i, $i\in\mathbb{N}$ sont des événements mutuellement indépendants, alors $P_{\bigcap_{k=1}^{i-1} A_k}(A_i) =$.

R3 – Cette formule est indispensable lorsque l'expérience aléatoire est composée de **plusieurs étapes successives** et qu'**une étape influence la suivante**.

R4 – Si les évènements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont incompatibles, alors $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) =$.

IV. 4 Comment calculer la probabilité d'une union finie ?

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'évènements. On cherche à calculer $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$.

Remarque :

On s'intéresse ici à $n \geq 4$, car sinon la formule du crible peut être appliquée.

La première question à se poser est : **Est-ce que ces évènements sont incompatibles ?**

- Si **OUI**, alors :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) =$$

- Si **NON**, alors on se demande **Est-ce que ces évènements sont mutuellement indépendants ?**
  - Si **OUI**, on récupère la probabilité d'une intersection grâce à la loi de Morgan :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) =$$

    et on se ramène ainsi au cas précédent.
  - Si **NON**, cela dépasse la cadre de ce cours.

IV. 5 Et dans le cas d'une union ou d'une intersection infinie ?

On se sert du théorème suivant :

Théorème 4.3 — Théorème de la limite monotone

Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements. On a :

- $\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) =$
- $\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) =$

On se ramène ainsi à l'étude des cas précédents.

Remarque :

Si les évènements sont incompatibles, on peut directement écrire que $\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k)$.

Exercice 5

En France la probabilité de gagner le gros lot au loto est $p = 1/19068840$. Un joueur immortel décide de jouer tous les jours au loto. Pour tout $n \geq 1$, on note P_n l'évènement « Le joueur a perdu le n-ième jour », et A_n l'évènement « Le joueur a perdu tous les jours jusqu'au jour n »

1. Déterminer $\mathrm{P}(A_n)$ pour tout $n \geq 1$. En déduire $\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} P_k\right)$.
2. Que représente l'évènement $\bigcap_{k=1}^{+\infty} P_k$? Qu'en déduit-on ?

Exercice 6

On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. On, note P_i l'évènement « Obtenir pile au i-ième lancer », et A l'évènement « obtenir au moins un pile au cours du jeu ». Calculer $P(A)$. ?