Exercice 1

Un joueur lance une pièce équilibrée une infinité de fois. On introduit les événements suivants :

- A : « Obtenir Face à tous les lancers »,
- B : « Obtenir Pile à tous les lancers »,
- C : « Obtenir au moins une fois Face »,
- D : « Ne jamais obtenir Face »,

- pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n : « Il obtient Face au n-ème lancer »,
- pour $n \in \mathbb{N}^*$, B_n : « Il obtient pour la première fois Face au n-ème lancer »,
- pour $n \in \mathbb{N}^*$, C_n : « Il obtient Face aux n premiers lancers ».

1. Décrire les événements A, B, C et D à l'aide des événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décrire les événements B_n et C_n à l'aide des événements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité de l'événement B_n.
   Montrer que C est un événement presque sûr et que D est un événement négligeable.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité de l'événement C_n.
   Montrer que A est un événement négligeable.

Exercice 2

Une urne U contient 5 boules blanches et 2 noires, une deuxième urne V contient 6 boules blanches et 3 noires. On choisit au hasard successivement, et avec remise, deux boules de chacune des urnes et on note leurs couleurs. On introduit les évènements :

— U_i : "Tirer une boule blanche dans l'urne U au $i$ème tirage".

— V_i : "Tirer une boule blanche dans l'urne V au $i$ème tirage".

1. Déterminer la probabilité de l'évènement A :" 4 boules choisies soient de la même couleur".
2. Déterminer la probabilisé de l'évènement B :" 2 boules blanches et 2 boules noires."

Exercice 3

On considère le système complet d'évènement $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p(A_n) = \lambda\dfrac{2^n}{n!}$. Déterminer la valeur de λ ?

Exercice 4

Une urne contient deux boules blanches et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne que l'on remet après avoir noté la couleur, jusqu'à ce que l'on obtienne la boule noire. On considère les évènements suivants :

$$\begin{aligned} A &= \{ \text{On effectue un nombre fini de tirages} \} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, F_n &= \{\text{Le jeu s'arrête au } n\text{-ième tirage} \} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, B_n &= \{\text{On tire une boule blanche au } n\text{-ième tirage} \} \end{aligned}$$

1. Justifier que les évènements F_n sont deux à deux incompatibles.
2. Exprimer l'évènement F_n en fonction des évènements B_i ($i \in [|1;n|]$), puis calculer $P(F_n)$.
3. Exprimer A en fonction des évènements F_n et déterminer $P(A)$.

Exercice 5

Legolas est un excellent archer. Depuis le temps qu'il tire des flèches (Il est immortel!!), on estime à $\dfrac{1}{100}$, la probabilité qu'il a de rater sa cible. Sa dextérité est telle que la réussite ou non d'un des ses tirs n'influence pas celle des autres. La bataille pour la terre du milieu commence et promet d'être longue. Il ne semble alors pas déraisonnable de penser que Legolas tirera une infinité de flèche. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n l'évènement "Legolas rate son n-ième tir" A_n l'évènement : " parmi les n premières flèches tirées, Legolas rate au moins une fois." On note également A l'évènement "Legolas rate sa cible au moins une fois".

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer A_n en fonction des $(R_i)_{i\geqslant 1}$.
2. Calculer pour tout entier $n \geqslant 1$, $P(A_n)$.
3. En déduire $P(A)$. Expliquer pourquoi, presque sûrement, un de ses ennemis peut s'estimer heureux.

Exercice 6

Un joueur lance un dé indéfiniment. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'évènement A_k : « On obtient 6 lors du k-ième lancer »et on pose aussi A_0 l'évènement « on n'obtient jamais le numéro 6 »

1. Exprimer A_0 en fonction des (A_k).
2. Déterminer $P(A_0)$.

Exercice 7

Un singe immortel tape tous les jours 100000 caractères de façon complètement aléatoire sur un clavier de 50 touches. Donner la probabilité que ce singe tape un jour l'intégralité des *Misérables* (on suppose que le livre contient exactement 100000 caractères et que l'on a besoin uniquement de ces 50 touches pour taper ce livre).

Exercice 8

Soit $p \in]0,1[$. On note $q = 1 - p$.
On effectue une infinité de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir Face est p.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement « Au cours des n premiers lancers, Face n'est jamais suivi de Pile ». Montrer que :
$$P(A_n) = \begin{cases} \dfrac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p-q} & \text{si } p \neq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{n+1}{2^n} & \text{si } p = \dfrac{1}{2}. \end{cases}.$$
2. Est-il possible que Face ne soit jamais suivi de Pile ?
Calculer la probabilité de l'événement A : « Face n'est jamais suivi de Pile ».

Exercice 9

On dispose de deux pièces d'apparence identique, la pièce A donnant pile avec la probabilité $a \in]0;1[$, et la pièce b donnant pile avec probabilité $b \in]0;1[$.
Pour le premier lancer du jeu, on choisit une pièce au hasard et pour le coups suivants, on adopte la stratégie suivante : si on obtient Pile, on garde la pièce pour le prochain lancer, et si on obitent Face, on change de pièce pour le lancer suivant.

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A_k l'évènement "le lancer se fait avec la pièce A, $B_k = \overline{A_k}$ et E_k : "le k-ième lancer amène Pile.

1. Trouver la relation entre $P(E_k)$ et $P(A_k)$.
2. Trouver une relation entre $P(A_{k+1})$ et $P(A_k)$.
3. En déduire $P(A_k)$ et $P(E_k)$.

Exercice 10

Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de cancer, problèmes cardiovasculaires liés au tabac, décide d'arrêter de fumer ; toujours d'après des statistiques, on estime les probabilités suivantes : si cette personne n'a pas fumé un jour J_n, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est $0,3$; mais si elle a fumé un jour J_n, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est $0,9$; On note p_n la probabilité que cette personne fume au jour J_n.

1. Que vaut p_0 ?
2. Calculer p_1 et p_2.
3. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n. En déduire la valeur de p_n en fonction de n ?
4. Cette personne va-t-elle finir par arrêter de fumer ?