CHAPITRE 19

DÉRIVATION

I. DÉRIVABILITÉ EN UN POINT

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

I. 1 DÉFINITIONS ET INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

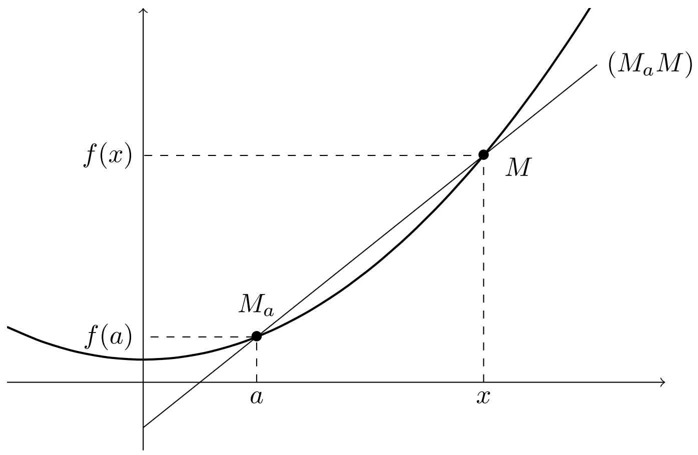
Définition 1.1

Soit $a \in I$. On dit que f est **dérivable** en a lorsque le taux d'accroissement de f en a : $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, admet une limite finie en a. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en a et est notée $f'(a)$. On a donc :

$$f'(a) =$$

Interprétation graphique :

Considérons les points de $\mathcal{C}_f$ suivants : $M_a(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$. Alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est le coefficient directeur de la droite $(M_a M)$.



La fonction f est dérivable en a si et seulement si la droite $(M_a M)$ « tend » vers une position limite quand M tend vers M_a. Cette position limite est la droite qui approche le mieux $\mathcal{C}_f$ au voisinage de a. Elle est appelée la **tangente** à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M_a. Elle passe par le point de coordonnées $(a, f(a))$ et a pour pente $f'(a)$, son équation est

Remarques :

R1 – Quand la dérivée de f en a existe, en posant $h = x - a$, on a aussi : $f'(a) =$.

R2 – Lorsque le taux d'accroissement tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ quand x tend vers a, la courbe $\mathcal{C}_f$ a une tangente verticale en M_a d'équation $x = a$.

Exercice 1

Étudier la dérivabilité de la fonction carré en 1, et la dérivabilité de la fonction racine carré en 0.

I. 2 DÉRIVÉE À GAUCHE ET DÉRIVÉE À DROITE

Définition 1.2

Soit $a \in I$. On dit que f est **dérivable à gauche** (resp. **dérivable à droite**) en a lorsque le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie à gauche (resp. à droite) en a. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé à gauche** (resp. **nombre dérivé à droite**)de f en a et est notée $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$). On a donc :

$$f'_g(a) = \qquad\qquad\qquad f'_d(a) =$$

Remarque :

Si f n'est pas définie à gauche de a, alors la notion de dérivabilité à droite se confond avec celle de dérivabilité tout court. (De même en inversant gauche et droite).

Proposition 1.3

Soit $a \in I$. la fonction f est dérivable en a si et seulement si

On a alors dans ce cas :

Exercice 2

1. Étudier la dérivabilité de la fonction valeur absolue en 0.
2. Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

I. 3 DÉVELOPPEMENT LIMITÉ À L'ORDRE 1

Définition 1.4

Soit $a \in I$. On dit que f possède un **développement limité à l'ordre 1** en a, noté $DL_1(a)$, s'il existe deux réels α et β et une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \qquad\qquad\qquad \text{avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) =$$

Intuitivement, un développement limité à l'ordre 1 d'une fonction est une approximation affine au voisinage du point considéré, c'est-à-dire l'écriture de cette fonction sous la forme d'une somme d'une fonction affine et d'un reste négligeable quand on est suffisamment proche du point considéré.

Théorème 1.5

La fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 en $a \in I$ **si et seulement si** f est dérivable en a. Dans ce cas, le développement limité s'écrit

$$f(x) = \qquad\qquad \text{avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) =$$

Remarque :

> En particulier les coefficients α et β sont uniques (quand ils existent). Ce résultat énonce qu'une fonction est « proche » de sa tangente au point considéré.

Exercice 3

1. Montrer que la fonction inverse est dérivable en 1 et donner son nombre dérivé en 1.
2. Quel est le développement limité à l'ordre 1 de la fonction inverse en 1 ?
3. Donner une valeur approchée de $\frac{1}{0,98}$.

Corollaire 1.6

Soit $a \in I$. Si la fonction f est dérivable en a alors elle est en a. La réciproque est

Remarques :

> **R1 –** En effet, si f dérivable en a, alors au voisinage de a, f peut s'écrire :
> Ainsi $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et vaut . Donc f continue en a.
>
> **R2 –** La réciproque est fausse. Un contre exemple est fourni par la fonction valeur absolue, qui est continue en 0, mais pas dérivable. Nous allons le démontrer dans ce qui suit.

Proposition 1.7 — Développements limités usuels à l'ordre 1 en 0

- $e^x = 1 + x + x\epsilon(x)$
- $\ln(1+x) = x + x\epsilon(x)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + x\epsilon(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ Avec $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$.

Le troisième DL permet de déduire deux cas particuliers importants.

Si $\alpha = -1$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$

I. 4 Interprétation graphique

Proposition 1.8

Soit $a \in I$.

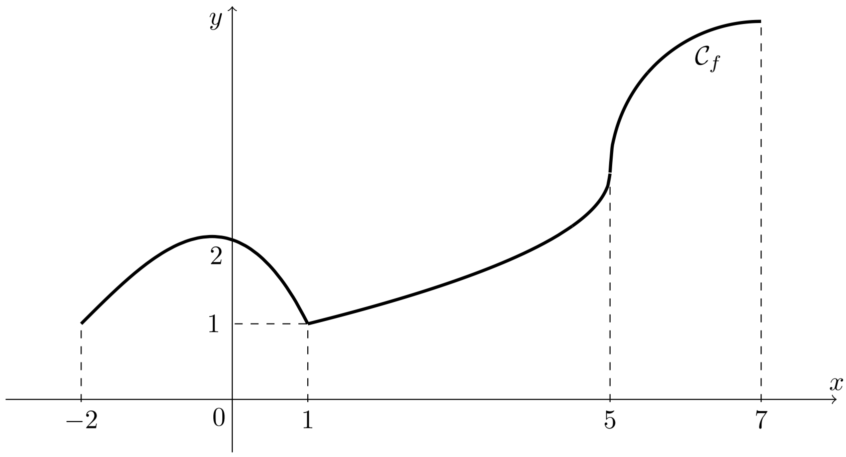
- Si f est dérivable en a alors sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet au point $M_a\big(a\,,\, f(a)\big)$ une tangente T d'équation :

$$y =$$

- Si f admet une dérivée à gauche (resp. à droite) en a, alors la courbe représentative de f admet une demi-tangente à gauche (resp. à droite) au point $M_a\big(a\,,\, f(a)\big)$ dont le coefficient directeur est $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$).
- Si f est continue en a et si $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a et $\mathcal{C}_f$ admet, en $M_a\big(a\,,\, f(a)\big)$, une tangente verticale.

Exemple :

Quelles informations graphiques peut-on tirer de la courbe suivante ?



II. Fonction dérivée

II. 1 Définitions

Définition 2.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est **dérivable sur** I lorsque f est dérivable en tout point de I. On appelle alors **fonction dérivée** de f, notée f', est la fonction qui à tout réel x de I associe $f'(x)$.

Exercice 4

Montrer que la fonction racine carré est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et donner sa dérivée

Définition 2.2

On dit que f est de classe C^1 sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.

II. 2 Dérivées usuelles

	$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de dérivabilité
$n \in \mathbb{N}^*$	x^n		
$n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$		ou
$\alpha \in \mathbb{R}$	x^α		
	$\ln(x)$		
	$\ln\lvert x\rvert$		ou
	e^x		
	$\lvert x\rvert$	$\begin{cases} & \text{si } x < 0 \\ & \text{si } x > 0 \end{cases}$	ou
$a \in \mathbb{R}_+^*$	a^x		

Remarques :

R1 – Les fonctions puissances (entière positive, négative et réelle) se dérivent suivant la même formule, mais les ensembles (de définition et de dérivabilité) ne sont pas les mêmes.

R2 – La fonction racine carrée et la fonction valeur absolue sont continues en 0 mais non dérivables en 0.

R3 – La fonction partie entière est définie sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est ni continue ni dérivable sur $\mathbb{R}$. En particulier, sa dérivée n'est pas la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

R4 – Les dérivées usuelles permettent de déterminer certaines limites usuelles (même si en fait, ce sont grâce à ces limites que nous déterminons les dérivées usuelles). Par exemple

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \qquad \text{ou encore :} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} =$$

III. Calculs de dérivées

III. 1 Somme, produit, quotient

Théorème 3.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles et λ une constante.

◇ Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I alors :

- $f = u + v$ est dérivable sur I et $f' =$
- $f = \lambda u$ est dérivable sur I et $f' =$
- $f = uv$ est dérivable sur I et $f' =$

◇ Si u et v sont dérivables sur I et **si v ne s'annule pas** sur I alors :

- $f = \dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et $f' =$
- $f = \dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $f' =$

Corollaire 3.2

- Tout polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) est dérivable sur tout intervalle où son dénominateur ne s'annule pas.

Exercice 5

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes et déterminer leur fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto (-4x^2 + 3x - 1) \times e^x$
2. $g : x \mapsto \dfrac{7x-3}{x^2-1}$
3. $h : x \mapsto \dfrac{xe^x - \ln x}{\sqrt{x}}$

III. 2 Dérivée d'une composée

Théorème 3.3

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que :

-
-
-

Alors $g \circ f$ est dérivable sur et on a pour tout $x \in$, on a : $(g \circ f)'(x) =$

Exemple :

Si u est une fonction dérivable sur I alors $\exp(u) = \exp \circ u$ est dérivable sur I (car $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, u dérivable sur I et $u(I) \subset \mathbb{R}$). On retrouve la formule $\exp(u)' = u' \times \exp(u)$.

Exercice 6

Étudier la dérivabilité de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 7}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 7

Soit u une fonction dérivable sur I et strictement positive. Montrer que $\sqrt{u}$ est dérivable et déterminer sa dérivée.

Les applications les plus souvent utiles de la formule de dérivation d'une fonction composée sont résumées dans le tableau suivant. On suppose que la **fonction u est dérivable sur un intervalle I**.

Fonction	Dérivée	Conditions
$f = u^n, n \in \mathbb{N}^*$	$f' =$	
$f = \dfrac{1}{u^n} = u^{-n}, n \in \mathbb{N}^*$	$f' =$	$\forall x \in I, u(x) \neq 0$
$f = u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ $f = \sqrt{u}$	$f' =$ $f' =$	$\forall x \in I, u(x) > 0$ $\forall x \in I, u(x) > 0$
$f = \ln(u)$	$f' =$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$f = \ln\lvert u\rvert$	$f' =$	$\forall x \in I, u(x) \neq 0$
$f = \mathrm{e}^u$	$f' =$	

Méthode :

Les théorèmes de dérivabilité par somme, produit, quotient et composition répondent à deux questions : la dérivabilité et le calcul de la dérivée. Pour déterminer une dérivée, on commence par déterminer pour quels réels les hypothèses des théorèmes sont vérifiées, puis on passe au calcul.

Exercice 8

Étudier la dérivabilité des fonctions $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ et $g : x \mapsto \ln(x^2 - 1)$ et déterminer leurs dérivées.

Attention:

Dans certains cas, les théorèmes précédents ne permettent d'établir la dérivabilité de la fonction que sur une partie de l'ensemble de définition. Si les théorèmes ne donnent pas la dérivabilité en un point a de l'ensemble, cela ne signifie pas que la fonction n'est pas dérivable. Pour étudier la dérivabilité en a en ces points il faut utiliser la définition.

Exercice 9

Étudier la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}$.

III. 3 Dérivée de la bijection réciproque

Théorème 3.4

Soit f une fonction dérivable et bijective de I sur $f(I)$. On note f^{-1} sa bijection réciproque définie sur $f(I)$. La fonction f^{-1} est dérivable en tout point $x \in J$ tels que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, et alors

$$(f^{-1})'(x) =$$

Remarque :

> En particulier si f' ne s'annule pas sur I, f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et la formule donnant la dérivée est toujours vraie.

Exercice 10

Retrouver la dérivée de la fonction racine à l'aide de la dérivée de la fonction carré.

IV. Dérivée et variations

IV. 1 Inégalité des accroissements finis

Théorème 4.1 — Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in I$, $m \leq f'(x) \leq M$.
Alors pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$, on a :

Méthode :

L'inégalité des accroissements finis permet d'encadrer les accroissements d'une fonction quand on sait encadrer la dérivée de celle-ci.

Exercice 11

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln x \leqslant \dfrac{1}{x}$

Corollaire 4.2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
On suppose qu'il existe un réel positif M tel que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant M$.
Alors pour tout $(a, b) \in I^2$, on a :

Méthode :

Cette version de l'inégalité des accroissements finis peut être utilisée même si on ne sait pas ordonner a et b. Elle est utile en particulier pour l'étude de certaines suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 12

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2+x}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.
2. Montrer que pour tout $x \in D_f$, $|f(x) - 2| \leqslant \dfrac{|x-2|}{2}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$. $|u_{n+1} - 2| \leq \dfrac{|u_n - 2|}{2}$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \leqslant 2^{1-n}$
5. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\geq 0}$.

IV. 2 Dérivée et monotonie

Théorème 4.3

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$,
- La fonction f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$,
- La fonction f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$,

Théorème 4.4

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout $x \in I, f'(x) \geqslant 0$ et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.
- Si pour tout $x \in I, f'(x) \leqslant 0$ et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante.

Attention:

Ces théorèmes ne sont valables que si I est un intervalle.

Remarque :

Si f est continue sur $[a, b]$, pour connaître la monotonie de f sur $[a, b]$, il suffit de l'étudier sur $]a, b[$. Ceci permet en particulier d'éviter de se poser la question de la dérivabilité de f en a et en b.

Exercice 13

Étudier les variations de la fonction f définie pour tout $x \in]0, +\infty[$ par $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)e^{1/x} + 1$. Dresser ensuite le tableau de variations de f (on précisera donc les limites éventuelles).

IV. 3 Extrema locaux des fonctions dérivables

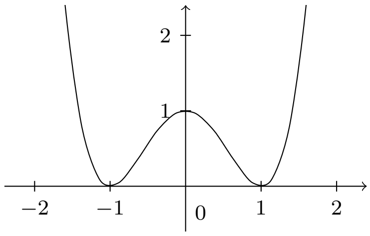
Définition 4.5

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f admet un **maximum (resp. un minimum) local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que f admet un maximum sur J en x_0.

Autrement dit, f admet un extremum local en un point si « au voisinage du point » f admet un extremum local en ce point.

Exemple :

Les extrema locaux de la fonction f représentée ci-dessous sont atteints en $x = -1$, $x = 0$ et $x = 1$.



Théorème 4.6

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit $a \in I$ qui n'est pas une extrémité de I. Si f possède un extremum local en a alors

Exercice 14

Donner les éventuels extrema locaux d'un trinôme du second degré.

Attention:

La réciproque du Théorème précédent est fausse : on peut avoir $f'(a) = 0$ sans que f admette un extremum local en a. La fonction cube $f : x \mapsto x^3$ donne un contre-exemple :

On a cependant le résultat suivant :

Proposition 4.7

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Soit $a \in I$ qui n'est pas une extrémité de I. Si f' s'annule en a **en changeant de signe** alors f admet un extremum local en a.

Remarque :

Le résultat précédent est une justification de ce que l'on remarque quand on dresse un tableau de variations et que l'on remarque un changement de variations.

Exercice 15

Un trinôme admet-il un extremum local ?