Exercice 1

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes au point d'abscisse x_0 :

— $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = |x^3|$ en $x_0 = 0$

— $\forall x \geqslant 1,\ f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$ en $x_0 = 1$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $g(x) = \ln(1 + x^2)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g. Montrer que g est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.
2. Donner l'équation de la tangente en à C_g au point d'abscisse 0.
3. Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 1 en 1 et le donner.

Exercice 3

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes et déterminer leur fonction dérivée.

1. $x \mapsto \dfrac{2x^2 - 4}{x^3 - 2x + 1}$
2. $x \mapsto 2^x$
3. $x \mapsto e^{\frac{2x}{x+1}}$
4. $x \mapsto \ln(x^2 - 3)$
5. $x \mapsto (1 + x^2)^x$
6. $x \mapsto \sqrt{3}x^{12} - 5x^3 + e^4x^2 + \ln 2$
7. $x \mapsto 3\ln x - 4e^x + 2x^{\frac{3}{2}}$
8. $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

Exercice 4

Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes. Déterminer leur fonction dérivée.

1. $x \mapsto \sqrt{1 - 4x^2}$
2. $x \mapsto x|x|$
3. $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + x^3)}{3x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = x \ln x$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f. Déterminer sa fonction dérivée.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
3. La fonction ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x\ln(x)$.

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que f est bijective de $[1/e, +\infty[$ sur un intervalle à préciser.
3. En quels points f^{-1} est-elle dérivable ?
4. Calculer $(f^{-1})'(0)$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.
2. Déterminer sa bijection réciproque que l'on notera f^{-1}.
3. Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur $]-1, 1[$.

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $[3; +\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{6 + x}$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $3 \leqslant u_n$.
2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - 3| \leqslant \dfrac{|u_n - 3|}{6}$.
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n - 3| \leqslant 2 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$.
4. Qu'en conclut-on ? Donner un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on a $|u_n - 3| < 10^{-5}$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie pour tout $x \in I = [1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{1 + \ln(x)}$.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in I$.
   (c) En étudiant le sens de variation de f', donner un encadrement de f' sur I.
2. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$ par $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, u_n est bien définie et $u_n \in I$.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $|u_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - 1|$.
   (c) En déduire que pour tout $n \geqslant 0$, $|u_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 10

Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $x \leqslant e^x - 1 \leqslant e\,x$.

Exercice 11

1. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$,
$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leqslant \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
3. Étudier la nature de $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$.