CHAPITRE 20

# ESPACES VECTORIELS

De nombreux problèmes mathématiques, physiques ou économiques, vérifient les propriétés suivantes : Etant données deux solutions $u$ et $v$ d'un problème, la somme $u+v$ et le produit par un réel $\lambda u$ restent solutions de ce problème. On qualifie alors ces problèmes de *linéaires*.

La notion d'espace vectoriel a pour but de donner un cadre rigoureux à l'étude de ce type de phénomènes.

## I. STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL.

Pour définir un espace vectoriel réel, on introduit deux types de lois :

**Définition 1.1**

Soit $E$ un ensemble non vide .
- On dit que $+$ est **une loi de composition interne** sur $E$ si :
- On dit que $\cdot$ est **une loi de composition externe** sur $E$ si :

**Définition 1.2**

Soit $E$ un ensemble muni d'une loi de composition interne (addition, notée $+$) et d'une loi de composition externe (multiplication par un réel, notée $\cdot$) . On dit que $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si

1. L'addition vérifie les propriétés suivantes
   (a) **Commutativité :** $\forall (x,y) \in E^2$,
   (b) **Associativité :** $\forall (x,y,z) \in E^3$,
   (c) **Elément neutre :** appelé *vecteur nul*,
   (d) Tout élément de $E$ a un **symétrique**
2. La multiplication par un réel vérifie les propriétés suivantes :
   (a) **Associativité :**
   (b) **Element neutre :**
   (c) **Distributivité :**

**Vocabulaire :** Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés **vecteurs**, et les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés **scalaires**.

### Remarque :

On retrouve certaines propriétés valables sur les réels

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \qquad \lambda \cdot x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E$$

**Exemple :**

Voici quelques espaces vectoriels usuels :

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ou encore $\mathbb{R}^n$, où $n \in \mathbb{N}$, munis de l'addition interne usuelle et de la multiplication scalaire (par un réel).
- Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel munis de l'addition interne usuelle et de la multiplication scalaire.
- Les ensembles de polynômes $\mathbb{R}[X]$, ou encore $\mathbb{R}_n[X]$ munis de l'addition interne usuelle et de la multiplication scalaire.
- L'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ des fonctions définies sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ munis de l'addition interne usuelle et de la multiplication scalaire.
- L'ensemble $C(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ munis de l'addition interne usuelle et de la multiplication scalaire.

**Dans toute la suite, on considérera un espace vectoriel $E$, $n \in [|2; +\infty[$, et $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une famille de vecteurs.**

# II. Sous-espaces vectoriels

## II. 1 Définition et généralités

**Définition 2.1**

Un ensemble $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si

-
-
-

**Remarque :**

En particulier on a toujours $0_E \in F$. En effet :

Ceci sert notamment à comprendre que $F$ est non vide, et qu'un ensemble qui ne contient pas le vecteur nul $0_E$, ne peut pas être un sous-espace vectoriel de $E$.

**Méthode :**

Pour montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ :

- On vérifie que $F$ est inclus dans $E$.
- On vérifie que $0_E$ est dans $F$.
- On montre que $F$ est stable par combinaison linéaire.

**Proposition 2.2**

Un sous-espace vectoriel de $E$ est un espace vectoriel.

**Méthode :**

Pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, on montrera toujours que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

**Exercice 1**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $B = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(R) \mid AX = 0\}$. Montrer que $B$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(R)$.
2. Soit $C = \{P \in \mathbb{R}[X] | \; P(0) = P'(0) = 0\}$. Montrons que $C$ est un espace vectoriel.
3. Montrer que $D = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \; f(1) = 2\}$ n'est pas un espace vectoriel.

**Remarque :**

L'ensemble $\{0_3\}$ est un espace vectoriel. C'est le plus petit sous-espace vectoriel possible de $E$.

## II. 2 Combinaison linéaire

**Définition 2.3**

Soit $x \in E$. On dit que $x$ est combinaison linéaire de $e_1, e_2, ..., e_n$ si il existe

**Exemple :**

Soients $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur $Z = 2X - 3Y =$ est une combinaison linéaire des vecteurs $X$ et $Y$.

**Méthode :**

Montrer qu'un vecteur est ou n'est pas combinaison linéaire d'une famille de vecteurs peut se ramener à la résolution d'un système linéaire.

**Exercice 2**

1. Soient $U = (1, 1)$, $V = (0, 1)$ et $X = (3, -4)\cdot$ Le vecteur $X$ est-il combinaison linéaire de $U$ et $V$ ?
2. Soient $U = (1, 1, 2)$, $V = (1, 1, -1)$ et $X = (1, 2, 4)$. Le vecteur $X$ est-il combinaison linéaire de $U$ et $V$ ?

**Remarque :**

Si le vecteur $X$ est une combinaison linéaire des vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_p$ alors l'écriture de $X$ sous forme de combinaison linéaire de $X_1, X_2, \ldots, X_p$ n'est pas nécessairement unique.

**Exercice 3**

Soient $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Montrer que $X$ est combinaison linéaire des vecteurs $X_1, X_2$ et $X_3$ et donner deux écritures différentes de $X$ comme combinaison linéaire de ces vecteurs.

**Théorème 2.4**

L'ensemble des combinaisons linéaires de $e_1, e_2, ..., e_n$, noté , est un sous-espace vectoriel de $E$. Il est appelé

*Démonstration.* □

## Remarque :

La définition donne

$$Vect(e_1, e_2, ..., e_n) =$$

## Exemple :

Si $X = (2, -1) \in \mathbb{R}^2$ alors $\text{Vect}(X) =$

**Exercice 4**

1. Montrer que $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + y + 2z = 0\}$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a & a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**Proposition 2.5**

Soient $e_1, e_2, ..., e_{n+1}$ des vecteurs de $E$.

- Si $e_{n+1} \in Vect(e_1, e_2, ..., e_n)$ alors $Vect(e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1}) =$

  En particulier, $Vect(e_1, e_2, ..., e_n, 0_E) =$
- Soit $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors $Vect(\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, ..., \lambda_n e_n) =$

*Démonstration.* □

## Remarque :

Cette proposition permet de mettre en évidence que $Vect(e_1, e_2, ..., e_n)$ est **le plus petit** espace vectoriel contenant $e_1, e_2, ...$ et $e_n$.

## Exemple :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ x + 2y + z \end{pmatrix} \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} =$$

## III. Famille génératrice, famille libre, base

**Définition 3.1**

- La famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une lorsque tout vecteur de $E$ est combinaison de linéaire des vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$.

  Autrement dit, ou encore $E =$

- La famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est dite si l'un de ces vecteurs est combinaison linéaire des autres.

  Autrement dit

- La famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est dite lorsq'elle n'est pas liée. Cela se traduit par :

  Si la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est libre, on dit que les vecteurs $e_1, e_2..., e_n$ sont

- La famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est lorsque tout vecteur de $E$ peut s'écrire **de manière unique** comme une combinaiuson linéaire des vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$ :

  Les réels $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ sont appéléees **coordonnées de $x$ dans la base** $(e_1, e_2, ..., e_n)$**.**

**Exemple :**

- La famille $((0, 1), (1, 0))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

**Méthode :**

Pour montrer qu'une famille de vecteurs $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est libre, on pose $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ et on montre qu'alors $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

**Remarque :**

La méthode précédente se ramène parfois à la résolution d'un système linéaire homogène. La famille est libre si ce système est de Cramer, liée sinon.

**Exercice 5**

1. Montrer que la famille $((1, 2), (-1, 1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.
2. La famille est $(1, 2), (-1, 1), (1, 1)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^2$ ?

**Remarques :**

**R1 –** Une famille de matrices colonnes dont les coefficients sont échelonnés est toujours libre. Ainsi la famille de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ : $\left(\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}\right)$ est libre.

**R2 –** Deux vecteurs sont linéairement indépendants lorsqu'ils sont non colinéaires.

**R3 –** On parle toujours **d'une base** d'un espace vectoriel, et non de *la base*.

### Remarques :

**R1 –** Une famille contenant le vecteur nul est

**R2 –** Une famille contenant deux fois le même vecteur est

**R3 –** Une famille dont l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des autres est

**R4 –** Une famille formée d'un seul vecteur est libre si, et seulement si, ce vecteur est

**R5 –** Une famille formée de deux vecteurs est libre si, et seulement si, ces vecteurs ne sont pas

**Proposition 3.2**

Une famille de vecteurs de $E$ est une base si, et seulement si, elle est libre **et** génératrice.

*Démonstration.* □

### Méthode :

Montrer qu'une famille de vecteurs est génératrice, ou bien une base, se ramène souvent à la résolution d'un système linéaire. Pour qu'il y ait unicité de la combinaison, il suffit de montrer que le système est de Cramer. La résolution complète permet de trouver les coordonnées.

**Exercice 6**

Montrer que la famille $(Y, Z)$ où $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Donner les coordonnées du vecteur $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans cette base.

### Remarque :

La famille de vecteurs $(X_1, X_2, X_3)$ définie dans l'exercice 3 n'est pas une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ car comme on l'a vu, le vecteur $X$ pouvait de décomposer de deux façons différentes.
$\Rightarrow$ La décomposition d'un vecteur dans une base est **unique**.

## Bases canoniques de $\mathbb{R}^n$

## Bases canoniques de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

**Bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$**

**Aspect géométrique**

**Exercice 7**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$ est un espace vectoriel et déterminer une base de $F$.

# IV. Dimension d'un espace vectoriel

**Théorème 4.1**

Si un espace vectoriel $E$ admet une base formée de $p$ vecteurs, alors toute autre base possède également $p$ vecteurs.

**Définition 4.2**

Si $E$ admet une base formée de $p$ vecteurs, alors l'entier naturel $p$ s'appelle de $E$, et on note On dit que $E$ est de

**Remarque :**

Le programme d'ECG Maths appliquées se limite à l'étude des espaces vectoriels de dimensions finies.

**Exemple :**

- $\dim(\mathbb{R}^2) =$ ,$\dim(\mathbb{R}^3) =$ , $\dim(\mathbb{R}^n) =$
- $\dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})) =$ , $\dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) =$
- $\dim(\mathbb{R}_2[X]) =$ , $\dim(\mathbb{R}_n[X]) =$

**Proposition 4.3**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors

1. $F$ est de dimension finie et
2. Si $\mathcal{L}$ est une famille libre de $E$, alors
3. Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de $E$, alors

Il en découle cette propriété, très utile dans la pratique

**Proposition 4.4**

Si $E$ est de dimension finie, alors une famille de vecteurs est une base de $E$ si, et seulement si, elle est libre **et** que son cardinale est égal à la dimension de $E$.

**Méthode :**

Pour montrer qu'une famille de espace vectoriel de dimension $p$ est une base, deux méthodes sont possibles :

1. Montrer qu'elle est libre et génératrice.
2. Montrer qu'elle est libre et de cardinal $p$.

**Exercice 8**

Montrer que la famille $(1, 1+X, 1+X+X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

### Rang d'une famille de vecteurs

**Définition 4.5**

Le rang de la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$, noté , est la dimension de l'espace vectoriel $Vect(e_1, e_2, ..., e_n)$.

**Remarques :**

**R1 –** Cette notion a bien un sens car $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une famille génératrice de $Vect(e_1, e_2, ..., e_n)$.

**R2 –** Le rang est donc le cardinal de la plus grande famille libre contenue dans $(e_1, e_2, ...e_n)$.