Exercice 1

Soient $X_1 = (0, 1, -1)$, $X_2 = (2, 1, 1)$, $X_3 = (4, -1, 5)$ et $X = (2, 3, -1)\cdot$

Montrer que le vecteur X appartient à $\text{Vect}(X_1, X_2, X_3)$.

Exercice 2

Soit $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Déterminer $Vect(X_1, X_2)$.

Les vecteurs suivants sont-ils des combinaisons linéaires des vecteurs X_1 et X_2 ?

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs suivants :

$$X_1 = (1, 2, 1), X_2 = (2, -1, -2), X_3 = (-1, 2, a) \quad (a \in \mathbb{R})$$

Montrer qu'il existe un réel a tel que le vecteur X_3 soit une combinaison linéaire des vecteurs X_1 et X_2. Le déterminer.

Exercice 4

On note $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ x + y + z = 0 \right\}\cdot$

Déterminer deux vecteurs U et V de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = Vect(U, V)$.

Exercice 5

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $F = \left\{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), MX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \right\}\cdot$ Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 6

Dans chacun des cas, dire si F est un espace vectoriel ou non. Si oui, donner une base et préciser sa dimension.

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.
2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y\}$.
3. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ -x + 2y = 0 \right\}$
4. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$
5. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ 2a + b = 1 \right\}$
6. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \right\}$
7. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ -5y + z = 0 \text{ et } y + z = 1 \right\}$
8. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a + b \\ b \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
9. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -x \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$
10. $F = \left\{ X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = 0 \right\}$
11. $F = \left\{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} X = 4X \right\}$
12. $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \geqslant 3\}$.

Exercice 7

Dans chaque ces, dire si F est un espace vectoriel ou non.

1. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}\}$
2. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est paire }\}$
3. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$
4. F =l'ensemble des suites qui convergent vers 0.

Exercice 8

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot$, $F_\lambda = \left\{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = \lambda X \right\}\cdot$

Montrer que F_1 et F_{-2} sont des sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner des bases.

Exercice 9

Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Déterminer les coordonnées de $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot$ dans cette base.

Exercice 10

Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) où $e_1 = (0,1,1)$, $e_2 = (2,0,-1)$, $e_3 = (2,1,1)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Déterminer les coordonnées de $X = (1,-2,-1)$ dans cette base.

Exercice 11

Déterminer le rang de chacune des familles ci-dessous, et préciser celles qui sont des bases de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

1. $\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$.
2. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.
3. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.
4. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.
5. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Exercice 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'indice de nilpotence $p \in [|2;+\infty[|$, c'est à dire

— $A^p = 0_n$.
— $\forall k \in [|1; p-1|]$, $A^k \neq 0_n$.

1. Montrer que la famille $(I_n, A, A^2, ..., A^{p-1})$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Quelle information peut-on en déduire sur p ?

Exercice 13

1. On pose $f_1 : x \mapsto e^x$, $f_2 : x \mapsto e^{2x}$ et $f_3 : x \mapsto e^{3x}$. On note $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de E. En déduire le rang de la famille (f_1, f_2, f_3).
   (b) La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle génératrice de E ?
2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ et $v_n = 2^n$. On note E l'ensemble des suites réelles.
   (a) Montrer que la famille $((u_n), (v_n))$ est libre dans E.
   (b) Notons $F = \{w \in E \mid \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} - w_{n+1} - 2w_n = 0\}$. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base. Quelle est sa dimension ?

Exercice 14

Soient a, b, c trois réels. On considère les matrices dee $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivantes :

$$I = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \quad M_{a,b,c} = \begin{pmatrix}a&b&c\\b&a+c&b\\c&b&a\end{pmatrix}$$

On note F l'ensemble des matrices de la forme $M_{a,b,c}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de I, A et J, puis montrer que $F = Vect(I, A, A^2)$.
3. La famille (I, A, A^2) est-elle libre ?

Exercice 15

Notons $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(X) - XP'(X) = 0\}$. Justifier que E est un espace vectoriel et en déterminer une base ainsi que la dimension.

Exercice 16

1. Donner les coordonnées du polynôme X^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que la famille $(1, 1+X, (1+X)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de X^2 dans cette base.
3. Montrer que la famille $(1, X, X(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de X^2 dans cette base.