Exercice 1

Une urne contient 3 boules vertes, 2 boules rouges et 4 boules noires. Un joueur tire au hasard une boule de l'urne. Le tirage d'une boule verte lui fait gagner 2 euros. Le tirage d'une boule rouge lui fait gagner 1 euro. Le tirage d'une boule noire lui fait perdre 3 euros. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Un joueur annonce à un camarade qu'il a gagné à ce jeu. Quelle est la probabilité qu'il ait gagné 2 euros ?

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie pour tout entier $n > 2$ par : $P(X = n) = \dfrac{1}{2^{n-2}}$. Vérifier que ceci définit bien une loi de probabilité, que X a une espérance et la calculer.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire discrète finie prenant ses valeurs dans $[|1, n|]$ pour n entier naturel non nul et telle que : $P(X = k) = \lambda k$ pour tout $k \in [|1, n|]$.

Déterminer λ puis calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$P(X = k) = a3^{-k}$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer a pour que l'on définisse bien ainsi une loi de probabilité.
2. X a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires ou impaires ?

Exercice 5

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, 3, \dots$ Il n'essaie de franchir la hauteur $n \in \mathbb{N}^*$ que s'il a réussi à passer les hauteurs précédentes. On suppose que le hauteur franchit toujours la hauteur 1 et si le hauteur a déjà réussi les $n-1$ premiers sauts (pour $n \geqslant 2$), la probabilité qu'il franchisse avec succès la n-ème hauteur est $\dfrac{1}{n}\cdot$ Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la dernière hauteur franchie correctement.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note R_i l'événement « Le sauteur réussit à franchir la hauteur i ».
   Soit $k \in X(\Omega)$. Exprimer l'événement $(X = k)$ en fonction des événements $(R_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.
   En déduire $P(X = k)$.
3. Vérifier qu'on a bien $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$.
4. Montrer que la variable aléatoire $X + 1$ a une espérance et la calculer. En déduire $E(X)$.
5. Montrer que la variable aléatoire $X^2 - 1$ a une espérance et la calculer. En déduire $V(X)$.

Exercice 6

Quatre urnes A, B, C et D contiennent chacune n jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard et de façon indépendante un jeton de chaque urne et on note X le plus grand des numéros tirés. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on note A_k l'événement « le jeton tiré de A a un numéro inférieur ou égal à k »(idem pour B_k, C_k et D_k).
Exprimer l'événement $(X \leqslant k)$ à l'aide de A_k, B_k, C_k et D_k.
En déduire la fonction de répartition de X, puis la loi de probabilité de X.

Exercice 7

Une variable aléatoire est telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$P(X = k) = p^2q^{k-1} + q^2p^{k-1}$, p et q étant deux éléments de $]0, 1[$ tels que $p + q = 1$. Montrer que $E(X)$ et $V(X)$ existent et les calculer. On pourra étudier l'espérance de $X(X-1)$ avant d'étudier la variance de X.

Exercice 8

Soient $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire de loi : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. On pose $Y = e^{-X}$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 9

Soit un entier naturel n et un réel $p \in]0; 1[$. On pose $\forall k \in [|0, n|]$, $P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

1. Vérifier que cela définit bien une loi de probabilité.
2. (a) Calculer l'espérance de X.
   (b) Calculer l'espérance de $X(X - 1)$, puis en déduire $V(X)$.
3. Calculer l'espérance de $Y = 2^X$.

Exercice 10

On considère la matrice M définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :
si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne, sinon elle n'est pas remise dans l'urne.
Pour tout $i \geqslant 1$, on note B_i (resp. R_i) l'évènement « on obtient une boule blanche (resp. rouge) lors du $i^{ème}$ tirage ».

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du $n^{ème}$ tirage et on pose $X_0 = 2$.

T_2 est le numéro du tirage où l'on extrait la deuxième boule blanche.

On considère les matrices suivantes : $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}[X_n = 0] \\ \mathbb{P}[X_n = 1] \\ \mathbb{P}[X_n = 2] \end{pmatrix}$, $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. (a) Déterminer pour tout entier naturel n, l'ensemble des valeurs prises par la variable X_n (on distinguera les trois cas : $n = 0, n = 1$ et $n \geqslant 2$)

   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $\forall n \geqslant 2$ on a $U_{n+1} = MU_n$.

   Vérifier que l'égalité précédente reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

2. (a) Calculer MV_1, MV_2 et MV_3.

   (b) En déduire par récurrence, pour tout entier naturel n, la relation suivante $U_n = V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3$

   (c) Donner la loi de la variable X_n puis calculer $\mathbb{E}(X_n)$, ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

3. (a) Ecrire les événements $[T_2 = 2]$ et $[T_2 = 3]$ à l'aide de certains des événements B_i et en déduire les valeurs des probabilités $\mathbb{P}[T_2 = 2]$ et $\mathbb{P}[T_2 = 3]$.

   (b) Pour $n \geqslant 2$, écrire l'événement $[T_2 = n]$ en fonction des événements $[X_{n-1} = 1]$ et $[X_n = 0]$.

   (c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a $\mathbb{P}[T_2 = n] = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$

   (d) Donner l'espérance et la variance de T_2.