CHAPITRE 20

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ désigne un espace probabilisé fini ou infini dénombrable.

I. VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE

I. 1 INTRODUCTION

Considérons l'expérience suivante : on jette deux fois un dé et on s'intéresse à la somme des chiffres obtenus que l'on note S. Modélisons cette expérience de la manière suivante : chaque issue de l'expérience peut être représentée par un couple (x, y) où $x \in$ et $y \in$. Autrement dit l'univers peut s'écrire $\Omega =$ et nous sommes en situation d'équiprobabilité.

La somme S est en fait une **variable** qui varie **aléatoirement** selon le couple obtenu. On dit que c'est une variable aléatoire. Remarquons que S associe à chaque issue de l'expérience $\omega = (x, y)$ un nombre (la somme des chiffres obtenus) : c'est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Pour finir, remarquons que ce qui nous intéresse, c'est la somme des chiffres obtenus et non pas les chiffres obtenus. On s'intéressera par exemple par la suite à la probabilité que cette somme soit égale, inférieure, supérieure à un certain réel. Donner par exemple la probabilité que la somme soit inférieure ou égale à 3 que l'on notera de manière simple : $P(S \leq 3)$.

I. 2 DÉFINITIONS ET EXEMPLES

Définition 1.1

On appelle **variable aléatoire réelle** toute une application X : $X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$.
Pour tout réel x, $[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{A}$ (c'est-à-dire que cet ensemble est un événement).

Autrement dit, une variable aléatoire réelle associe à chaque issue d'une expérience un nombre réel. Le fait que $[X \leqslant x]$ soit un évènement pour tout $x \in \mathbb{R}$ permettra de calculer la probabilité de cet ensemble.

Notations :

- On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire X, on a donc :

$$X(\Omega) = \{X(\omega),\, \omega \in \Omega\}$$

  On dit que $X(\Omega)$ est le **support** de X.

- Si $x \in \mathbb{R}$, on note $[X = x]$ l'ensemble

- Si $x \in \mathbb{R}$, on note $[X \geq x]$ l'ensemble

- On définit de même $[X > x]$ et $[X < x]$.

- Si I est un intervalle, on note $[X \in I]$ l'ensemble

On dit qu'une variable aléatoire est **discrète** lorsque son support est un ensemble fini ou infini dénombrable.

Exemple :

Reprenons l'exemple de l'introduction. Le support de S est $S(\Omega) =$, c'est donc une variable
L'évènement $[S = 11]$ est réalisé si et seulement si la somme des deux numéros obtenus vaut 11. On a donc :

$$[S = 11] =$$

Exemple :

On lance un dé jusqu'à obtenir un 6. T vaut k si le jeu se termine en k lancers exactement. On a alors $T(\Omega) =$. Cette variable est donc

Exercice 1

Un joueur lance une pièce jusqu'à obtenir un « Pile ». On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués jusqu'au premier « Pile », et à 0 si l'on n'obtient jamais « pile ». Déterminer $Y(\Omega)$ et exprimer les événements $[Y = 2]$ et $[1 \leqslant Y \leqslant 3]$ en fonctions des évènements A_n définis pour tout $n \geq 1$ par « On obtient pile au n-ième lancer ».

I. 3 S.C.E associé à une variable aléatoire

Définition/Proposition 1.2

Soit X une variable aléatoire. On note $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$ avec I fini ou infini.
Alors $([X = x_i])_{i \in I}$ est une système complet d'événements appelé **système complet d'événements associé à la variable aléatoire discrète X.**

Exemple :

- Le système complet d'évènements associé à la variable aléatoire S (somme des deux dés) est :

- Celui associé à la variable T précédente est :

Remarque :

En particulier $\sum_{i \in I} \mathrm{P}(X = x_i) =$. La somme peut être finie ou la somme d'une série convergente.

Exercice 2

A l'aide du système complet d'évènements associé à la variable T de l'exemple précédent, exprimer les événements B : « Le jeu se termine en au plus 4 lancers », $C = \overline{B}$, D : « Le jeu ne se termine jamais », E : « Il se termine en un nombre fini de lancers » et F : « Il y a eu au moins 5 lancers ».

I. 4 Loi de probabilité d'une v.a.r. discrète

Définition 1.3

Définir la **loi de probabilité** d'une variable aléatoire discrète X c'est :

1. Déterminer le support $X(\Omega)$: c'est-à-dire toutes les valeurs possibles de X.
2. Calculer les probabilités $\mathrm{P}\left(X = k\right)$ pour toutes les valeurs de k appartenant à $X(\Omega)$.

La première question à se poser sur une variable aléatoire discrète est celle de son support :

La variable est-elle à support fini ou infini ?

Exercice 3

On lance trois fois une pièce équilibrée et on note X le nombre de « piles » obtenus. Déterminer la loi de X.

Exercice 4

Donner la loi de probabilité de la variable T de l'exercice précédent.

II. Fonction de répartition

Définition 2.1

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle fonction de répartition de X la fonction F_X définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F_X(x) =$$

Remarques :

- **R1 –** $P(X \leq x)$ est une notation abusive mais acceptée pour $P([X \leq x])$.
- **R2 –** Il faut bien comprendre que $[X \leq x]$ correspond à l'évènement $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}$. C'est une notation qui simplifie l'écriture. La fonction de répartition en un point x est donc égal à la probabilité que cette variable aléatoire soit inférieure ou égale à x.

Proposition 2.2

Soient X une variable aléatoire discrète et F_X sa fonction de répartition.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) \in$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) =$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) =$
- F_X est une fonction
- F_X est continue à
- Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leqslant b$, alors $\mathrm{P}(a < X \leqslant b) =$

Remarques :

R1 – Si $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ alors pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$\mathrm{P}(X = k) =$$

R2 – Le dernier point permet de retrouver la loi d'une variable aléatoire discrète à partir de sa fonction de répartition. On en déduit en effet le résultat suivant.

Proposition 2.3

Si deux variables aléatoires réelles discrètes ont la même fonction de répartition, alors elles ont la même loi.

Exercice 5

Expliciter la fonction de répartition de la variable X de l'exercice précédent.

III. VARIABLE ALÉATOIRE $Y = g(X)$

Proposition 3.1

Soit X une variable aléatoire discrète et g une fonction dont le domaine de définition contient $X(\Omega)$. Alors l'application $Y = g(X)$ est une variable aléatoire discrète.

Méthode :

Pour déterminer la loi de $Y = g(X)$, on procède en deux étapes :

1. On détermine le support de Y : $Y(\Omega) =$
2. On détermine les antécédents $k_1, k_2 \dots$ par g de chaque réel $l \in Y(\Omega)$. On a alors :

$$\mathrm{P}(Y = l) = \mathrm{P}(X = k_1) + \mathrm{P}(X = k_2) + \cdots$$

Exercice 6

Soit Y la variable aléatoire discrète telle que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Y = k) = \frac{1}{k(k+1)}$$

1. Vérifier qu'il s'agit d'une loi de probabilité.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)^2$ si $x \leq 3$ et $f(x) = 2$ sinon. Déterminer la loi de $W = f(Y)$.

Exercice 7

Reprenons le dernier exercice lié à la variable X. Un joueur paie 4 euros pour jouer, puis lance une pièce 3 fois de suite. Il gagne 2 euros à chaque fois qu'il obtient pile. On appelle G le gain algébrique du joueur en euros. Exprimer G en fonction de la variable X et déterminer $G(\Omega)$. Déterminer la loi de la variable aléatoire G de l'exemple précédent puis celle de G^2.

IV. Moments d'une variable aléatoire

Dans toute la suite, on suppose que X est une variable aléatoire discrète, tels que $X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in I}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$.

Rappels :

- Une série de terme général u_n est absolument convergente si
- Si une série est absolument convergente alors

IV. 1 Espérance

Définition 4.1

Soit X une variable aléatoire discrète. On dit que X **admet une espérance** lorsque la série $\sum_{i\in I} x_i P(X = x_i)$ est **absolument convergente**. Dans ce cas, cette série est convergente. On appelle alors **espérance** de X et on note $\mathrm{E}(X)$ le réel défini par

$$\mathrm{E}(X) =$$

Attention:

Si le support de X est fini, la convergence a toujours lieu puisqu'on se ramène une somme finie de termes. Ainsi :

- **Si X est à support fini.**
  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. L'espérance existe toujours et

  $$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \, \mathrm{P}(X = x_k)$$

- **Si X est à support infini.**
  $X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in I}$. L'espérance n'existe pas toujours. Si $\sum_{i\in I} |x_i P(X = x_i)|$ converge, alors :

  $$E(X) = \sum_{i\in I} x_i \, \mathrm{P}(X = x_i)$$

Remarque :

L'espérance est la moyenne des valeurs possibles de X pondérées par leurs probabilités.

Exercice 8

En reprenant l'exercice précédent, donner l'espérance de X et de G. Interpréter l'espérance de G.

Exercice 9

Montrer que la variable aléatoire T de l'exemple admet une espérance et la calculer.

Remarques :

R1 – Dans le cas d'une variable aléatoire finie, l'espérance est une somme finie. Dans le cas d'une variable aléatoire discrète infinie, si **l'espérance existe**, c'est la somme d'une série absolument convergente.

R2 – Une variable aléatoire finie admet **toujours** une espérance.

Notation : On dit que X est positive si elle ne prend que des valeurs positives et si Y est une autre variable aléatoire, on note $X \leq Y$ si pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$.

Proposition 4.2

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance et a un réel. Alors

- $\mathrm{E}(X+Y) =$
- $\mathrm{E}(aX) =$ (**linéarité**).
- Si X est positive alors (**positivité**).
- Si $X \leqslant Y$, alors (**croissance**).

Remarques :

R1 – Si X est une variable certaine, c'est-à-dire si il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = a) = 1$ alors $E(X) =$

R2 – Si X est une variable aléatoire admettant une espérance et $a, b \in \mathbb{R}$, alors $\mathrm{E}(aX + b) =$

Définition 4.3

Une variable aléatoire admettant une espérance est dite **centrée** lorsque $\mathrm{E}(X) =$

Proposition 4.4

Si X est une variable aléatoire admettant une espérance alors la variable aléatoire $X - \mathrm{E}(X)$ est centrée.

Théorème 4.5 — de transfert

Soients X une variable aléatoire discrète, et g une fonction dont le domaine de définition contient $X(\Omega)$. La variable aléatoire discrète $Y = g(X)$ admet une espérance **si et seulement si** la série $\sum_{i \in I} g(x_i) P(X = x_i)$ est absolument convergente. Dans ce cas, on a :

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}\left(g(X)\right) =$$

Attention:

Si le support de X est fini, la convergence a toujours lieu puisqu'on se ramène une somme finie de termes. Ainsi :

- **Si X est à support fini.**
  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Alors Y aussi et $E(Y)$ existe toujours :
  $$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\, \mathrm{P}(X = x_k)$$
- **Si X est à support infini.**
  $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$. $E(Y)$ n'existe pas toujours. Si $\sum_{i \in I} |g(x_i) P(X = x_i)|$ converge, alors :
  $$E(Y) = \sum_{i \in I} g(x_i)\, \mathrm{P}(X = x_i)$$

Remarque :

L'énorme intérêt du Théorème de transfert est de prouver l'existence et de calculer l'espérance de $Y = g(X)$ sans avoir besoin de déterminer la loi de Y, ce qui est parfois délicat.

Exercice 10

Reprenons la variable aléatoire X de l'exercice précédent. On pose $Y = X^2$ et $Z = 2X + 1$. Donner l'espérance de ces deux variables aléatoires.

Exercice 11

Déterminer, si elle existe, l'espérance de la variable aléatoire $U = T(T-1)$ où T est donnée dans l'exemple I. 2.

IV. 2 Moment d'ordre r

Définition 4.6

Soient $r \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire discrète. On dit que X admet un moment d'ordre r lorsque X^r admet une espérance.
Dans ce cas, **le moment d'ordre r de X** est

$$m_r(X) =$$

Remarques :

- **R1 –** Une variable aléatoire finie admet des moments d'ordre r pour tout $r \in \mathbb{N}$.
- **R2 –** On utilise le Théorème de transfert pour étudier l'existence d'un moment d'ordre r.
- **R3 –** L'espérance est le moment d'ordre 1.
- **R4 –** Soient $r, s \in \mathbb{N}$ avec $s \leqslant r$. Si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'ordre s.

Exercice 12

Donner le moment d'ordre 2 et d'ordre 3 de X (la variable aléatoire de l'exercice précédent).

Exercice 13

Montrer que la variable T de l'exemple I. 2 a un moment d'ordre 2 et le calculer.

IV. 3 Variance

Définition/Proposition 4.7

Si X est une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2, alors X admet **une variance**, notée $\mathrm{V}(X)$, qui est définie par :

$$\mathrm{V}(X) =$$

Si X admet une variance, alors on définit son **écart-type** par

$$\sigma(X) =$$

Remarques :

- **R1 –** Si X admet une variance, alors X admet une espérance.
- **R2 –** Une variable aléatoire finie admet toujours une variance.
- **R3 –** $\mathrm{V}(X)$ mesure la dispersion de X autour de son espérance.

Proposition 4.8 — propriétés de la variance

Soient a et b deux réels et X est une variable aléatoire discrète admettant une variance. Alors :

- $\mathrm{V}(X) \geqslant 0$ et $\sigma(X) \geqslant 0$;
- $aX + b$ admet une variance, et :

$$\mathrm{V}(aX+b) = \qquad \text{et} \quad \sigma(aX+b) =$$

Proposition 4.9 — Formule de Koenig-Huygens

Si X admet une variance, alors $V(X) =$

Méthode :

La formule de Koenig-Huygens est souvent utilisée pour calculer $\mathrm{V}(X)$: on calcule $\mathrm{E}(X^2)$ à l'aide du théorème de transfert : **en cas de convergence absolue**, on a :

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{i \in I} x_i^2 \, \mathrm{P}(X = x_i)$$

On « passe » par les sommes partielles pour prouver la convergence absolue et calculer la somme.

Exercice 14

Montrer que la variable T de l'exmple I. 2 a une variance et la calculer.

Définition/Proposition 4.10

- On dit qu'une variable aléatoire discrète X est **centrée réduite** si elle admet une variance et si $\mathrm{E}(X) =$ et $\mathrm{V}(X) =$
- Si X une variable aléatoire discrète admettant une variance non nulle, alors $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire discrète centrée réduite. Elle est appelée variable aléatoire centrée réduite associée à X. On la note X^*.