CHAPITRE 22

# INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

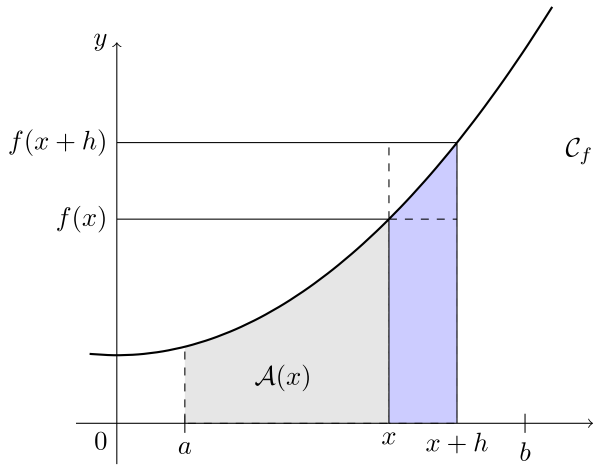
## I. MOTIVATION

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Pour simplifier, on suppose ici que la fonction $f$ est croissante et positive. On note $\mathcal{A}$ la fonction qui, a tout $x$ dans l'intervalle $[a;b]$ associe l'aire sous la courbe entre les abscisses $a$ et $x$. (On admet que cette fonction est bien définie). On montre alors que

**Proposition 1.1**

Soient $a$ et $b$ deux réels vérifiant $a < b$ et $f$ une fonction définie sur le segment $[a,b]$, positive, continue et croissante.

Soit $\mathcal{A}$ la fonction qui à tout réel $x$ de $[a,b]$ associe l'aire sous la courbe de $f$ sur l'intervalle $[a,x]$.
Alors la fonction $\mathcal{A}$ est dérivable sur $[a,b]$ et pour tout $x \in [a,b]$, $\mathcal{A}'(x) = f(x)$.




Soit $h > 0$, $\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)$ est l'aire sous la courbe entre les abscisses $x$ et $x+h$. Comme $f$ est croissante, cette aire est comprise entre le petit rectangle de hauteur $f(x)$ et la grand de hauteur $f(x+h)$. Ainsi

$$f(x) \times h \leq \mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x) \leq f(x+h) \times h$$

$$\Leftrightarrow f(x) \leq \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leq f(x+h)$$

Comme $f$ est continue , $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$ et, par encadrement

$$f(x) \leq \mathcal{A}'_d(x) \leq f(x) \Leftrightarrow \mathcal{A}'_d(x) = f(x)$$

Donc $\mathcal{A}$ est dérivable à droite en $x$ et $\mathcal{A}'_d(x) = f(x)$.

En prenant $h < 0$, on montre de la même facon que$\mathcal{A}$ est dérivable à gauche en $x$ et $\mathcal{A}'_g(x) = f(x)$. Donc, comme $\mathcal{A}'_g(x) = \mathcal{A}'_d(x) = f(x)$, la fonction $\mathcal{A}$ est dérivable en tout point $x \in [a;b]$ et $\mathcal{A}'(x) = f(x)$.

### Remarques :

**R1 –** On a fait la démonstration dans le cas d'une fonction monotone, mais on peut étendre ce résultat pour toute fonction continue.

**R2 –** Autrement dit, la dérivée de la fonction « Aire sous la courbe d'une fonction » (dans un cadre particulier) est la fonction elle-même. Si l'on cherche à déterminer l'aire sous la courbe d'une fonction $f$, on peut commencer par déterminer les fonctions $F$ dérivables dont la dérivée est $f$ (si cela existe) : c'est ce qu'on appelle les **primitives** de $f$.

# II. Primitives

## II. 1 Primitives d'une fonction

**Définition 2.1**

Soient $I$ un intervalle et $f$ une fonction définie sur $I$.
On appelle **primitive** de $f$ sur $I$ toute fonction $F$ sur $I$ telle que pour tout $x \in I$,

**Exemple :**

Les fonctions $f$ et $g$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) =$ et $g(x) =$ sont des primitives de la fonction carré sur $\mathbb{R}$.

**Attention:**

Si une fonction $f$ admet une primitive alors **cette primitive n'est pas unique**.

**Proposition 2.2**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.
Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$ alors l'ensemble des primitives de $f$ sur $I$ est l'ensemble des fonctions de la forme $F + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Autrement dit, deux primitives d'une fonction diffèrent d'une constante.

**Exercice 1**

Donner l'ensemble des primitives de la fonction carré sur $\mathbb{R}$.

**Proposition 2.3 — Unicité d'une primitive en fixant une valeur**

Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Si $f$ admet des primitives sur $I$ alors il existe une **unique** primitive $F$ de $f$ sur $I$ telle que $F(x_0) = y_0$.

**Exercice 2**

Déterminer l'unique primitive de la fonction carré sur $\mathbb{R}$ qui vaut $-\dfrac{2}{3}$ en 1.

**Remarques :**

**R1 –** Toutes les fonctions n'admettent pas des primitives.

On peut considérer par exemple la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ On peut montrer par l'absurde que cette fonction n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$. En effet, la primitive doit alors être dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ et cela aboutit à une contradiction (bon exercice)

**R2 –** D'après la proposition 1.1, toute fonction continue, positive et croissante admet une primitive : La fonction « aire sous la courbe » $\mathcal{A}$ est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$. Le théorème suivant généralise ce résultat.

**Théorème 2.4**

Toute fonction sur un intervalle $I$ admet des

### Remarque :

> Il s'agit d'un théorème d'existence : on sait que la primitive existe, mais on ne sait pas comment la calculer. Il existe des fonctions dont la primitive ne s'exprime pas à partir des fonctions usuelles.

## II. 2 Primitives des fonctions usuelles

Le tableau suivant donne les primitives $F$ des fonctions usuelles $f$, $I$ étant le (ou les) intervalles où les fonctions et leurs primitives sont définies.

| $f$ | $F$ | $I$ |
|---|---|---|
| $f(x) = a$ (constante) | $F(x) =$ , $(k \in \mathbb{R})$ | |
| $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ | $F(x) =$ , $(k \in \mathbb{R})$ | |
| $f(x) = 1/x^n$, $n \in \mathbb{N}, n \neq 1$ | $F(x) =$ , $(k \in \mathbb{R})$ | ou |
| $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$ | $F(x) =$ , $(k \in \mathbb{R})$ | |
| $f(x) = \dfrac{1}{x}$ | $F(x) =$ , $(k \in \mathbb{R})$ | ou |
| $f(x) = \mathrm{e}^x$ | $F(x) =$ , $(k \in \mathbb{R})$ | |
| $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | $F(x) =$ , $(k \in \mathbb{R})$ | |

**Exercice 3**

Donner la primitive de $f : x \mapsto x^4$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1 et la primitive de $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ sur $]-\infty, 0[$ qui s'annule en $-2$.

**Proposition 2.5**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle $I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$ et $G$ est une primitive de $g$ sur $I$ alors

- Les primitives de $f + g$ sont de la forme avec $k \in \mathbb{R}$ ;
- Les primitives de $\lambda f$ sont de la forme avec $k \in \mathbb{R}$.

**Exercice 4**

Déterminer les primitives de $x \mapsto x^2 + 2x + \dfrac{3}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

**Interdit:**

La fonction $F \times G$ n'est pas une primitive de $f \times g$ ! En effet, $(F \times G)' =$

**Proposition 2.6**

Soient $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $f$ une fonction définie sur $J$ avec $u(I) \subset J$.
Si $F$ est une primitive de $f$ sur $J$, alors les primitives de $x \mapsto f(u(x)) \times u'(x)$ sur $I$ sont les fonctions de la forme avec $k \in \mathbb{R}$.

Le tableau suivant donne des cas particuliers de la proposition précédente. Dans le tableau, $u$ est une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$.

| la fonction $f$ | admet pour primitive $F$ | sur $I$ |
|---|---|---|
| $u' \times u^n,\ n \in \mathbb{N}$ | , $(k \in \mathbb{R})$ | |
| $u' \times u^n,\ n \in \mathbb{Z}^-,\ n \neq -1$ | , $(k \in \mathbb{R})$ | $u$ ne s'annule pas sur $I$ |
| $u' \times u^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1$ | , $(k \in \mathbb{R})$ | $u$ strict. positive sur $I$ |
| $\dfrac{u'}{u}$ | , $(k \in \mathbb{R})$ | $u$ ne s'annule pas sur $I$ |
| $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ | , $(k \in \mathbb{R})$ | $u$ stric. positive sur $I$ |
| $u' \times e^u$ | , $(k \in \mathbb{R})$ | |

**Exercice 5**

Donner les primitives des fonctions suivantes (on précisera les intervalles) :

- $f : x \mapsto e^{2x+1}$
- $g : x \mapsto x^2(x^3+1)^5$
- $h : x \mapsto \dfrac{3x}{x^2+1}$
- $i : x \mapsto \dfrac{2x}{(x^2+5)^5}$
- $j : x \mapsto (x+1)^2 x$
- $k : x \mapsto \dfrac{1+x+x^4}{x^2}$

Les primitives précédentes doivent être reconnues « à vue » : l'important est de reconnaitre la forme de la fonction étudiée !

# III. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

## III. 1 Définition et exemples

Rappelons que d'après le Théorème 2.4, toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

**Définition/Proposition 3.1**

Soient $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$, $F$ une primitive de $f$ sur $I$ et $a,\ b$ deux réels de $I$. **L'intégrale entre $a$ et $b$ de $f$** est le réel défini par

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; \Big[F(t)\Big]_a^b \;=$$

Ce réel est **indépendant de la primitive** choisie.

**Remarque :**

La lettre $t$ dans l'expression ci-dessus est une **variable muette**. On peut aussi bien écrire :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b \text{ ou } \int_a^b f(u)\;du = [F(u)]_a^b$$

**Interprétation graphique :** Soit $f$ une fonction continue croissante positive sur un segment $[a,b]$ (avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$).

D'après la proposition, 1.1 la fonction « aire sous la courbe » $\mathcal{A}$ est la primitive de $f$ sur $[a,b]$ qui s'annule en $a$. Ainsi :

$$\int_a^b f(t)\;dt = [\mathcal{A}(t)]_a^b = \mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a) = \mathcal{A}(b).$$

Donc $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **l'aire sous la courbe** de $f$ sur l'intervalle $[a,b]$.

Plus généralement, si $f$ est une fonction continue sur un segment $[a,b]$ (avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$) alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est l'aire **algébrique** sous la courbe de $f$ sur l'intervalle $[a,b]$ (lorsque $f$ est positive, l'aire est comptée positivement et lorsque $f$ est négative, l'aire est comptée négativement).

**Exercice 6**

Calculer $\displaystyle\int_1^2 x^2\;dx$. Représenter graphiquement cette valeur.

**Exercice 7**

Calculer les intégrales suivantes : $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t}\;dt$, $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t^2+1}\;dt$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\;dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

## III. 2 Propriétés

**Proposition 3.2**

Soient $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $(a,b) \in I^2$. Alors :

$$\int_a^a f(t)\,dt = \qquad \text{et} \int_a^b f(t)\,dt = -$$

**Théorème 3.3 — Relation de Chasles**

Soient $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $(a,b,c) \in I^3$. Alors : $\displaystyle\int_a^c f(t)\;dt =$

**Proposition 3.4 — Linéarité de l'intégrale**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et$(a,b) \in I^2$. Alors :

$$\int_a^b (f(t)+g(t))\;dt = \qquad\qquad \text{et} \qquad \int_a^b \lambda f(t)\;dt =$$

# IV. Méthodes de calcul

## IV. 1 Méthode directe

Si on cherche à calculer l'intégrale d'une fonction dont on connaît une primitive, on utilise la définition.

**Exercice 8**

Justifier que ces intégrales existent et les calculer : $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} (t+1)(t+2)^2 \, dt$, $J = \displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{y\sqrt{y}} \, \mathrm{d}y$ et $K = \displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\ln(x)}{x} \, \mathrm{d}x$.

## IV. 2 Intégration par parties

**Proposition 4.1 — Formule d'intégration par parties**

Soient $u$ et $v$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et $(a,b) \in I^2$. Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t) \, dt \; =$$

### Remarques :

**R1 –** Cette formule permet de calculer l'intégrale d'une fonction s'écrivant sous la formule d'un produit.

**R2 –** En général, on dérive les fonctions $\ln$ (primitive inconnue ou compliquée) et polynômes (baisser le degré) et on prend la primitive des fonctions exponentielles.

**Exercice 9**

Calculons l'intégrale suivante : $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} te^t \, dt$.

**Exercice 10**

A l'aide de deux intégrations par parties, calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 e^x \, \mathrm{d}x$.

**Exercice 11**

Calculer $I = \displaystyle\int_{1}^{e} \ln t \, dt$.

La formule d'intégration par parties est **très utilisée** pour obtenir une relation de récurrence vérifiée par une suite d'intégrales.

**Exercice 12**

Pour tout entier naturel $n$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$. Déterminer une relation entre $I_{n+1}$ et $I_n$ pour $n \geq 0$. Calculer $I_0$ et en déduire $I_1$ et $I_2$.

### IV. 3 CHANGEMENT DE VARIABLE

**Théorème 4.2 — Changement de variable**

Soient $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$, $u$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $J$ telle que $u(J) \subset I$ et $(\alpha, \beta) \in J^2$. Alors :

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)\,dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

**Méthode :**

Dans la pratique, la formule s'applique de la manière suivante :

- On pose $x = u(t)$ et on précise que $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J$.
- On exprime si possible $t$ en fonction de $x$ : $t = v(x)$.
- On dérive : $dx = u'(t)dt$ ou $dt = v'(x)dx$.
- On change les bornes : Si $t = \alpha$ alors $x = u(\alpha)$ et si $t = \beta$, $x = u(\beta)$.

**Exercice 13**

Calculons $I = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{t(\ln t + 1)}\,dt$ avec le changement de variable $x = \ln(t)$.

**Exercice 14**

Calculer $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t\sqrt{-2t+1}\,dt$ avec le changement de variable $(x = -2t + 1)$.

**Remarque :**

> Si $a \neq 0$, le changement de variable $x = at + b$ est toujours possible. Si le changement de variable n'est pas affine (il sera alors indiqué), il faut « faire apparaître » $u'(t)$ en facteur dans l'intégrale.

**Corollaire 4.3**

Soient $a \in \mathbb{R}^+$ et $f$ une fonction continue sur $[-a, a]$.

- Si $f$ est paire sur $[-a, a]$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt =$
- Si $f$ est impaire sur $[-a, a]$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt =$

Représentons graphiquement les propriétés précédentes :