CHAPITRE 23

COMPLÉMENTS SUR L'INTÉGRATION

I. PROPRIÉTÉS

Proposition 1.1 — Positivité de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

- Si pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \geqslant 0$ alors
- Si pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \geqslant 0$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors pour tout $t \in [a, b]$,

Remarques :

R1 – Ne pas oublier l'hypothèse $a < b$!

R2 – On a un résultat équivalent si la fonction est négative.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie pour tout $n \geq 0$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$. Montrer que cette suite est positive.

Corollaire 1.2 — Croissance de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$ avec avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

Si pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors

Remarque :

Il est donc possible « d'intégrer des inégalités » vraies sur tout le segment $[a, b]$ à condition d'avoir $a \leqslant b$. Lorsque l'on cherche à majorer ou minorer une intégrale, on utilise très fréquemment cette propriété.

Exercice 2

Reprenons l'exercice précédent. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \dfrac{1}{n+1}\cdot$ Qu'en déduit-on ?

Proposition 1.3 — Inégalité triangulaire

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leqslant b$. Alors :

$$\left| \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant$$

Rappel : Une fonction continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes.

Proposition 1.4 — Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leqslant b$. Alors :

$$(b - a) \min_{t \in [a,b]} f(t) \leqslant \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \leqslant (b - a) \max_{t \in [a,b]} f(t)$$

II. Fonctions et suites définies par une intégrale

II. 1 Fonctions définies par une intégrale

Dans cette section nous souhaitons obtenir des propriétés sur des fonctions définies par des intégrales. Nous donnons ici un point méthode pour les étudier.

Dans un premier temps, il faut réperer de quel type de fonction il s'agit. Il y a en a deux

Cas n°1 : $F : x \mapsto \displaystyle\int_c^x f(t)dt$ où c est une constante **Cas n°2 :** $G : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$

Etude du cas n°1

Théorème 2.1 — Théorème fondamental de l'analyse

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$.

Soit F la fonction définie par $F(x) =$

Alors F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et F est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Exemple :

La fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
D'après le Théorème fondamental de l'analyse, la fonction F définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et est l'unique primitive de f s'annulant en 0 : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$ et $F(0) = 0$.

Exercice 3

Étudier la dérivabilité de $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{1}{1 + t^2}\, \mathrm{d}t$.

Etude du cas n°2

Théorème 2.2

Soit deux fonctions u et v de classe C^1 sur un intervalle I, à valeurs dans J, et f une fonction continue sur J. Alors la fonction $\varphi(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est de classe C^1 sur I et pour tout $x \in I$:

$$\varphi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

Exercice 4

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{3x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t$. Justifier que f est bien définie, étudier la dérivabilité de f et donner l'expression de sa dérivée.

II. 2 Suites définies par une intégrale

Nous donnons dans cette section uniquement quelques exemples.

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$ Qu'en déduit-on ?

Exercice 6

Étudier la monotonie de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\int_0^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.