Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes

$$f(x)=\int_1^x \ln(t)dt \qquad g(x)=\int_x^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t \qquad h(x)=\int_{1/2}^x \frac{dt}{t^2-t} \qquad k(x)=\int_{-x}^{x^2}\ln(1+t^4)\,\mathrm{d}t$$

Pour chacune de ces fonctions, donner l'ensemble de définition, justifier qu'elle est de classe C^1, et expliciter sa dérivée.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x \frac{t^2}{t^8+1}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
2. Soit $\varphi : x\mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{t^2}{t^8+1}\,\mathrm{d}t$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donner son développement limité en 1.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1.

Exercice 3

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$, par $h(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{e^{-t^2}}{t}dt$

1. Justifier que h est bien définie, puis donner son signe.
2. Montrer que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x>0$ $h'(x)=\dfrac{2e^{-x^4}-e^{-x^2}}{x}$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est une fonction impaire.
   Indication : On pourra faire le changement de variable $u=-t$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.
3. Etudier les variations de f.
4. Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $xe^{-4x^2}\leqslant f(x)\leqslant xe^{-x^2}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 5

Étudier la monotonie des suites définies pour $n\in\mathbb{N}^*$ par les expressions suivantes.

$$a_n=\int_1^n (1-x)^3e^x\,\mathrm{d}x\ ,\ b_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x\ ,\ c_n=\int_1^2\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\ ,$$

$$\alpha_n=\int_1^{\frac{1}{n}}(\ln y)^5\,\mathrm{d}y\ ,\ \beta_n=\int_1^{\ln n}\frac{t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 6

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^1\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout $t\in[0,+\infty[$, $0\leqslant\ln(1+t)\leqslant t$.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant I_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}$.
3. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 7

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\int_1^e\ln(x)^n dx$.

1. Justifier l'existence de I_n pour tout $n\geqslant 0$.
2. Trouver une relation entre I_n et I_{n+1} pour tout $n\geqslant 0$. Donner I_0, I_1 et I_2.
3. Pour $n\geqslant 0$, on pose $f_n : x\mapsto \ln(x)^n$. Justifier l'existence d'une primitive F_n de f_n sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose alors $G_n : x\mapsto F_n(e^x)$. Justifier que G_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.
4. En déduire que pour tout $n\geqslant 1$, $F_n(e)-F_n(1)=\displaystyle\int_0^1 t^ne^tdt$ puis que $0\leqslant I_n\leqslant\dfrac{e}{n+1}$.
5. Qu'en déduit-on ?

Exercice 8

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1(1-x)^ne^x\,dx$.

1. (a) Justifier pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'existence de I_n.
   (b) Donner les valeurs de I_0 et I_1.
2. (a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant I_n\leqslant\dfrac{e}{n!}$
   (b) En déduire que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge et donner sa limite.
3. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n\geqslant 0$, $I_{n+1}=I_n-\dfrac{1}{(n+1)!}$
   (b) En déduire que pour tout $n\geqslant 0$, $I_n=e-\displaystyle\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}$
   (c) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}$.