CHAPITRE N°24

LOIS DISCRÈTES USUELLES

I. LOIS DISCRÈTES FINIES

I. 1 LOI UNIFORME

Définition 1.1

Soient X une variable aléatoire finie et $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit que X **suit la loi uniforme sur** $[\![1\,;\,n]\!]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1\,;\,n]\!])$ si :

- $X(\Omega) =$
- Pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\mathrm{P}\left(X = k\right) =$

Autrement dit, X suit une loi uniforme sur $[\![1\,;\,n]\!]$ si elle prend ses valeurs dans $[\![1\,;\,n]\!]$ et que l'on a la même probabilité d'obtenir chacun de ces nombres.

Proposition 1.2

Soient X une variable aléatoire finie et $n \in \mathbb{N}^*$. Si X suit la loi uniforme sur $[\![1\,;\,n]\!]$ alors :

$$\mathrm{E}(X) = \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(X) =$$

Démonstration. □

Exercice 1

Soit X la variable aléatoire égale au résultat du lancer d'un dé équilibré. Déterminer la loi de X et en déduire son espérance et sa variance.

Définition 1.3

Soient X une variable aléatoire finie et a et b deux entiers naturels avec $a \leq b$. On dit que X **suit la loi uniforme sur** $[\![a\,;\,b]\!]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a\,;\,b]\!])$ si

- $X(\Omega) =$
- Pour tout $k \in [\![a\,;\,b]\!]$, $\mathrm{P}\left(X = k\right) =$

Remarque :

On peut toujours se ramener à la loi uniforme sur $[\![1\,;\,n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 1.4

Soient X une variable aléatoire finie et $n \in \mathbb{N}^*$. Si X suit la loi uniforme sur $[\![a\,;\,b]\!]$ alors :

$$\mathrm{E}(X) = \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(X) =$$

Démonstration. □

I. 2 Loi de Bernoulli

Définition 1.5

Soit $p \in [0,1]$.

1. On appelle épreuve de **Bernoulli** de paramètre p une expérience aléatoire comportant deux issues : le succès qui a pour probabilité p et l'échec qui a pour probabilité $1-p$.
2. Soit X une variable aléatoire finie. On dit que X **suit la loi de Bernoulli de paramètre** p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ si

- $X(\Omega) =$
- $\mathrm{P}\left(X=1\right) =$ et $\mathrm{P}\left(X=0\right) =$

Si l'on considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p et que l'on note X la variable aléatoire finie valant 1 si l'on obtient un succès et 0 si l'on obtient un échec alors X suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Dans ce cas l'évènement $[X=1]$ est l'évènement « on obtient un succès » et $[X=0]$ est « obtenir un échec ».

Remarque :

$\mathcal{B}(\frac{1}{2}) = \mathcal{U}(\{0,1\})$.

Proposition 1.6

Soient X une variable aléatoire finie et $p \in]0,1[$. Si X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ alors $\mathrm{E}(X) =$ et $\mathrm{V}(X) =$

Démonstration. □

Exercice 2

On lance une pièce truquée qui donne « face » avec la probabilité $\frac{1}{3}$. Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat est « face » et 0 si le résultat est « pile ». Déterminer la loi de la variable aléatoire X, ainsi que son espérance et sa variance.

I. 3 Loi binomiale

Définition 1.7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ si X est une variable aléatoire comptant le nombre de succès lors d'une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.

Proposition 1.8

Soient X une variable aléatoire finie, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Si X **suit la loi binomiale de paramètres** n **et** p, alors :

- $X(\Omega) =$
- Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathrm{P}\left(X = k\right) =$

Remarques :

R1 – Si $n = 1$, on retrouve la loi de Bernoulli de paramètre p.

R2 – Cette proposition est en fait équivalente à la définition.

Exercice 3

Un secrétaire effectue 50 appels vers 50 correspondants distincts. On admet que ces appels constituent 50 expériences indépendantes et que pour chaque appel la probabilité d'obtenir le correspondant est $\frac{1}{3}$. On note X le nombre de clients obtenus. Donner la loi de X.

Proposition 1.9

Soient X une variable aléatoire finie, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p alors $\mathrm{E}(X) =$ et $\mathrm{V}(X) =$

Démonstration. □

Exemple :

En moyenne, le secrétaire de l'exercice précédent va réussir à joindre $\frac{50}{3}$ correspondants.

Exercice 4

On lance 5 fois une pièce truquée qui donne « face » avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
On suppose que les résultats des différents lancers sont indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de « face » obtenus. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, ainsi que son espérance et sa variance. Quelle est la probabilité que l'on obtienne au maximum 1 face ?

Exercice 5

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. On note $p \in]0,1[$ la proportion de boules blanches. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs avec remise dans cette urne.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues. Donner la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des boules de la même couleur ?

II. Lois discrètes infinies

II. 1 Loi géométrique

Considérons l'expérience suivante :

- On répète indéfiniment une épreuve de Bernoulli.
- Les réalisations de l'épreuve sont identiques : la probabilité de succès étant égale à $p \in]0,1[$.
- Les réalisations de l'épreuve sont mutuellement indépendantes.

Soit X la variable aléatoire égale au rang du premier succès.
Remarquons qu'il se pourrait que l'on obtienne jamais un succès. On peut cependant montrer à l'aide du TLM que la probabilité que l'on n'obtienne jamais un succès est nulle. (bon exercice) On négligera donc cet évènement.

Exercice 6

Quel est le support de X ? Déterminer $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ puis $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$

Définition 2.1

Soient X une variable aléatoire discrète et $p \in]0,1[$. On dit que X **suit la loi géométrique de paramètre** p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ lorsque :

- $X(\Omega) =$
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) =$

Retenir

Une variable géométrique donne le rang du premier succès lors de la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Proposition 2.2

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, $p \in]0,1[$ alors X admet une variance (et donc nécessairement une espérance) et on a :

$$\mathrm{E}(X) = \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(X) =$$

Démonstration. □

Proposition 2.3 — Preuves à savoir refaire

Si X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ alors :

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X > k) = (1-p)^k$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X \leq k) = 1 - (1-p)^k$.
- Pour tout $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, $P_{(X>k)}(X > k + l) = P(X > l)$. On dit qu'il s'agit d'un processus **sans mémoire**.

Démonstration. □

Exercice 7

On considère deux joueurs A et B qui disposent chacun d'une pièce telle que la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$. Chaque joueur lance autant de fois que nécessaire sa pièce jusqu'à l'obtention d'un pile. On note X_A (respectivement X_B) le nombre de lancers nécessaires au joueur A (respectivement B) à l'obtention de son premier pile.

1. Déterminer la loi de X_A et X_B. Donner leur espérance et leur variance.
2. Calculer la probabilité que les deux joueurs obtiennent leur premier pile après le même nombre de lancers.
3. On pose $Y = \max(X_A, X_B)$. Justifier que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit F_Y la fonction de répartition de Y, déterminer $F_Y(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la loi de Y.

II. 2 Loi de Poisson

Introduction **Modélisation :** Une société d'assurance souhaite modéliser le nombre X d'accidents de voitures par jour sur la portion d'autoroute joignant Nice à Cannes. Pour simplifier les calculs, elle suppose que chaque voiture, indépendamment des autres, a la même probabilité $p \in]0;1[$ d'avoir un accident sur cette route.

Hypothèse : Il passe 2500 voitures par jour sur cette autoroute.

Avec cette hypothèse, on a une répétition d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes, et X compte le nombre de succès (si on peut appeler ça comme cela...). Alors X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2500, p)$.

Problème dans la modélisation : Pourquoi il y aurait-il un nombre fixe de voitures par jour sur cette route ? On peut tout à fait imaginer que la fréquentation de cette route dépend du fait qu'on soit un week-end, en période de vacances etc.

Comment remédier à ce genre de problème ? On va introduire une loi de probabilité, dite **loi de Poisson**, qui permettrait à X de prendre toutes les valeurs possibles, mais attribuerait aux trop grandes valeurs de X une probabilité quasi-négligeable. **Définitions - Propriétés**

Définition 2.4

Soient X une variable aléatoire discrète et $\lambda \in]0, +\infty[$.
On dit que X **suit la loi de Poisson de paramètre** λ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ lorsque :

- $X(\Omega) =$
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

Remarque :

Il s'agit bien d'une loi de probabilité :

Proposition 2.5

Soient λ un réel strictement positif et X une variable aléatoire. Si X suit la loi de Poisson de paramètre λ, alors X admet une variance (et donc nécessairement une espérance) et on a :

$$\mathrm{E}(X) = \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(X) =$$

Démonstration. $\square$

Lien avec la loi binomiale

Remarque :

> Dans le problème ci dessus, on peut considérer sans trop se tromper que la probabilité qu'une voiture ait un accident sur cette portion d'autoroute est très faible, c'est à dire que p est proche de 0. Aussi le fait qu'une voiture ait un accident peut être vu comme un "évènement rare" .
> **La loi de Poisson est la loi des événements rares : elle sert d'approximation de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ quand n est « grand » et que p est « petit ».**

Proposition 2.6 — Théorème de Poisson

Soit $\lambda \in]0,+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant \lambda$, on pose $p_n = \dfrac{\lambda}{n}$ et on considère une variable aléatoire X_n de loi $\mathcal{B}(n, p_n)$. Alors pour tout entier naturel k,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Interprétation : si on considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec n « grand » et p « petit », alors pour les premières valeurs de k, on approche $\mathrm{P}(X = k)$ par $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ avec $\lambda = np$.

Exemple :

> Il y a $n = 7 \times 10^6$ français qui jouent au loto. La probabilité de gagner est environ $p = \dfrac{1}{20 \times 10^6}\cdot$ Si X est la variable aléatoire égale au nombre de gagnants alors X suit une loi binomiale de paramètres n et p. Or n est très grand par rapport à p (gagner est « rare »). En moyenne, il y a $np = \dfrac{7}{20} = 0.35$ gagnants. On remplace la loi binomiale par la loi de Poisson (c'est une approximation) et on peut donc écrire que pour tout $k \geq 0$,
>
> $$P(X = k) = e^{-0.35}\frac{0.35^k}{k!}$$
>
> On a $P(X = 3) = 0.005$ (facilement calculable, ce qui n'est pas le cas si l'on utilisant la loi binomiale à cause des factorielles de très grands nombres).

Cette approximation est pratique car les coefficients binomiaux sont difficiles à calculer pour des grandes valeurs de n.

Dans la pratique on utilise cette approximation lorsque n est supérieur à 50 et p est tel que $\lambda = np \leq 5$.

Exemple :

> On considère une assemblée de 500 personnes et on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de personnes nées un premier janvier. Quelle est la loi de X ? Comment approcher la probabilité $\mathrm{P}(X = k)$ pour $k \in [\![0\,;\,5]\!]$?